

THE
PRINCESS OF WALES
SARASVATĪ BHAVANA

No. 80

(PART I)

—o—

EDITED

BY

Dr. MANGAL DEVA SHASTRI,

M. A., D. PHIL. (OXON.),

PRINCIPAL,

GOVT. SANSKRIT COLLEGE, BĒNARES

THE

CHALARĀŚĪKALANA

(PART I)

—————

Printed by

M. V. Paradkar

Jnanamandal Yantralaya, Benares City

—————
1941.

म० म० सुधाकरद्विवेदिविरचितं

चलराशिकलनम्

चतुर्ध्यायात्मकः प्रथमो भागः



THE

CHALARASĪKALANA

BY

M. M. SUDHĀKARA DVIVEDI

(PART I)

EDITED

BY

Pt. BALDEVA MISHRA

Jyautishacharya Jyautish Tirth

SARASVATĪ BHAVANA'

BENARES.

1941.

PREFACE.

A SUFFICIENT account has been already given in the preface of my Differential Calculus* of the gradual development of Differential and Integral Calculus in Europe, and also in whose mind the notion of this science first arose in India. Therefore, here I only wish to say that the learned public may not think it to be a mere translation or an abstract of some European book, but as a new treatise on the subject. I have shown, as far as possible, all the important theorems together with numerous examples, so that the students may be able to grasp the methods thoroughly and thereby solve problems without the least doubt.

Many new methods are described in different portions of this book, which will be found simpler than those of Europeans. For instance, Mr Todhunter in his Integral Calculus, article 14, for the integration of

$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ assumed $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x$. The same assumption was described by Mr Williamson. Mr Hymers putting $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ into the form $\frac{(\sqrt{x^2 \pm a^2})(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$ deduced the integral

Professor De Moirgan worked thus

Let $\sqrt{x^2 \pm a^2} = y$, then $x^2 \pm a^2 = y^2$.

$\therefore 2x dx = 2y dy$ or $x dx = y dy$.

Therefore, $x dx + y dx = y dy + y dx$,

$\therefore dx = \frac{y(dx + dy)}{x + y}$, by substituting $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm y^2}} =$

$$\int \frac{y(dx + dy)}{y(x + y)} = \int \frac{dx + dy}{x + y} = \text{Log}(x + y) = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

Professor De Morgan deduced a second method of $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ also, by employing an imaginary quantity, thus

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (i\sqrt{-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{dx \sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \text{Sin}^{-1} \frac{x\sqrt{-1}}{a}. \end{aligned}$$

But by De Moirer's Theorem

$$\text{Cos } \theta - \text{Sin } \theta \sqrt{-1} = e^{-\theta} \sqrt{-1}$$

Named Chalana-Kalan, which is dedicated to His Honor Sir Alfred Lyall, K C B, C I. E. late Lieutenant-Governor of the North-Western Provinces and Chief Commissioner of Oudh, and published by the order of Government in 1886

Extracts from newspapers and journals

$$\sin \theta \sqrt{-1} = \text{Log} (\cos \theta - \sin \theta \sqrt{-1})$$

A HINDI TREATISE ON THE DIFFERENTIAL CALCULUS *

OPINIONS OF THE PRESS

It has long been regretted that, notwithstanding the vast amount of tuition constantly given in India and the undoubted intelligence of the people, that country has contributed nothing to the general stock of scientific knowledge. We have to go back a thousand years to reach a period of independent scientific research, and from that remote time to these a period of intellectual stagnation appears to have supervened. At last that reproach has been removed, for a scholar has arisen with sufficient mental force to grasp the highest problems of both Western and Eastern science, and with sufficient originality to weave the two together into an harmonious system, while criticising and improving on both. The book to which we are now calling attention is therefore, a remarkable one, and calls for special notice as the first forward step which India has made in this department of study for centuries. But the chief point to note in the book is that it is written in the Hindi language, which not only affords another demonstration of the increasing prominence which that language is attaining, but enables the book to give to thousands of Indian mathematicians who are unfamiliar with the English language the means of carrying their studies to a very high point. This is a most important fact, because it is well known that a scientist is not often at the same time a linguist, still less is it given to mortals to gain such power over a foreign language as to permit them not only to acquire what that foreign language has to teach, but to carry on independent research beyond that point. The work before us removes that obstacle by presenting to Indian scholars in their own vernacular the highest facts of Western science. The author has furthermore, had the judgment to unite with those facts the really correct processes of ancient Indian mathematicians, and, in this way, he grafts on to the Indian mind the additional knowledge of Europe. To do this, it is clear he had to originate processes of his own, for, in a subject like the *Differential Calculus*, resting on the nicest discrimination of the reasoning faculty, mere translation of the ideas of one people into the language of another people would have been simply futile. The author has proved himself to possess a masterly knowledge of mathematics by the skill with which he has transfused--not translated--European ideas into Indian language, and there can be no doubt that his valuable work will give a real impetus to original scientific research among his countrymen.

It is not generally known that the old Indian mathematician Bhaskaracharya, so long ago as A. D. 1150 had devised a method of calculation practically identical with the *Differential Calculus*, and the term *tatkalkiyati*, which he applied to the increment he used, has much the same significance as that employed in the *Differential Calculus*. He was right in his method, but wrong in his proof, and his accuracy is seen by the fact that he was able to demonstrate that when a variable attains the maximum value its differential vanishes, and that when a planet is either in apogee or in perigee the equation of centre vanishes. He was aware that the increment vanishes in some intermediate position, and from this the principle of continuous function follows in due course, which is the basis of the proof of Taylor's theorem

*"Chalana-Kalana" by Pandit Sudhokara Devivedi Benares. Lazarus and Co., 1886

$$\text{Let } \sin \theta = \frac{x}{a} \sqrt{-1}, \quad \cos \theta = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}, \quad -\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}},$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{x \sqrt{-1}}{a} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin^{-1} \frac{x \sqrt{-1}}{a} =$$

$$\text{Log} \left\{ \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a} (\sqrt{-1})^2 \right\} = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$$

where we omit the constant quantity $\text{Log } a$

The learned Pandit makes use of these and other facts to interweave Western with Eastern science, and to lead his country-men to move onward from the basis of truth they already possess. Pandit Sudhakara Dvivedi has done something to advance scientific knowledge in India, and it is to be hoped that he will be encouraged to redeem his promise and complete a series of work on Analytical Geometry, the Integral Calculus, and Quaternions. The Indian Government would do wisely by circulating this admirable book among the native students at colleges, and especially among private students in the Hindi area of Northern India—*The Overland Mail*, Feb 4, 1887

A REALLY remarkable book on the differential Calculus has just been published at Benares, which ought to be made known to Europe. It is called *Chalana Kalana*, and it is written by Pandit Sudhakara Dvivedi, of the Sanskrit College, Benares.

It is the first forward step that India has made in independent scientific research in modern times, and the author deserves the highest praise for the masterly manner in which he has dealt with his difficult subject. He has placed it in the power of Indian mathematicians to carry their studies to a very high point in their native Hindi, and he has done this not by merely translating an English mathematical work, but by writing an entirely new treatise, deduced from the discoveries of Descartes, Newton, Leibnitz, Bhaskaracharya and others. The methods of these authorities are transfused into Indian processes, thereby enabling native scholars to follow Western methods and reasoning with confidence and intelligence. He utilises a method of dealing with variables, devised by Bhaskaracharya, which is practically identical with that of the differential calculus, and he cites other correct processes which that admirable old astronomer was able to formulate. In this skilful way the author grafts Western science on to the Indian mind, while, in the general plan of his work, he follows Todhunter's well-known treatise. Originality is likewise shown by the author's simplification of Todhunter's method of treating vanishing fractions; and in the sections he has appended on analytical geometry and conic sections—additions rendered necessary by the fact that no treatise on them exists in the Hindi language.

The Pandit promises a series of works on the higher branches of mathematics, dealing fully with analytical geometry, the integral calculus, and quaternions. He has shown in the present work that he thoroughly understands his subject, and it is to be hoped, for the advancement of science, that he will succeed in directing the acute reasoning powers of Indians to the mathematical and scientific problems of the Western world—*The Academy* Feb 12, 1887. F P

In view of the aptitude for numerical calculation which the Hindus are acknowledged to possess in a marked degree, it seems singular that India, in modern days,

All the above assumptions that are described by the mathematicians can hardly be apprehended unless it is known that

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \text{Log} (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

Therefore I have described a new method in article 9, thus

Let $\int \frac{dx}{f(x)} = \text{Log} \{y + f(x)\}$ where y is a function of x , here the form of $f(x)$ is to be found.

By differentiating the above equation with respect to x

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{f'(x) dx + dy}{f(x) + y}$$

$$\therefore f(x) dx + y dx = f(x) f'(x) dx + f(x) dy$$

By transposing

$$f(x) dx - f(x) dy = \{ f(x) \} \{ dx - dy \} = f(x) f'(x) dx - y dx$$

$$= \{ f(x) f'(x) - y \} dx$$

By division

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{dx - dy}{f(x) f'(x) - y} = \frac{dx - dy}{x - y},$$

and specially during the period in which it has been subject to the English, with their free-handed educational encouragement, should have contributed so little to the development of mathematical science. It was not destined, however, that Bhaskaracharya, Brahmagupta, and their compeers of ages far remote should be wholly without their nineteenth century successors. Ramachandra, a native of Delhi, besides translating numerous works on mathematics, including the higher, from English into Urdu produced, a generation ago, at least one work in the same language, distinguished by accredited originality. Reference is here intended to his 'Problems of Maxima and Minima,' the second edition of which, prefaced by the late Prof De Morgan, was published in London in 1859, under the auspices of the Court of Directors, who signified their appreciation of it by presenting its author with £200, after their liberal fashion. And now we have to announce the appearance last year, of a kindred treatise, but one of much ample scope, 'Chalana-kalana,' bearing the alternative title of "A Hindi Treatise on the Differential Calculus." This admirably printed volume, extending to nearly 500 pages, has for its author Pandit Sudhakara Dvivedi, Librarian of the Sanskrit College at Benares. The learned Pandit, already favourably known as a mathematician by what he has written, in Sanskrit, on the properties of the ellipse, lays claim to the introduction of many new methods, over and above demonstrating the validity of a certain method which had previously been pronounced unsound. In an English preface, abounding with interesting facts and criticisms, he gives it as his opinion that Bhaskaracharya, who, though he flourished in the twelfth century, is supposed to have been indebted for nothing to European sources, "was in no way inferior to Archimedes, in respect of his methods of differential calculus." As the Pandit expresses himself with perfect clearness in our language, it is due to his reputation that he should render into it those portions of his treatise in which, as he alleges, he has improved on what has been accomplished by his predecessors—Mr Todhunter and Mr Hall, in particular.—*The Nation* Feb 10, 1887,

$$\begin{aligned} & \text{if } f(x) f'(x) = x, \\ \therefore \int \frac{dx - dy}{x - y} &= \int \frac{dx}{f(x)} \text{ i. e. } \text{Log } (x - y) = \text{Log } \{ f(x) + y \}, \\ \therefore x - y &= f(x) + y \text{ or } y = \frac{x - f(x)}{2} \text{ and } \int \frac{dx}{f(x)} \text{Log } \{ f(x) + y \} \\ &= \text{Log } \left\{ \frac{f(x) + x}{2} \right\} = \text{Log } \{ f(x) + x \}, \end{aligned}$$

where the constant $\text{Log } 2$ is omitted.

Thus a theorem has been framed that when $f(x) \times f'(x) = x$ then

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{f(x)} &= \text{Log } \{ f(x) + x \}, \\ \text{In } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, f(x) &= \sqrt{x^2 \pm a^2} \\ f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \text{ and } f(x) f'(x) = x \\ \therefore \int \frac{dx}{f(x)} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \\ &= \text{Log } \{ f(x) + x \} = \text{Log } (\sqrt{x^2 \pm a^2} + x), \text{ by my method.} \end{aligned}$$

In like manner many other new methods have been described.

I have added many important theorems with numerous interesting examples regarding the Calculus of Variation and Dynamics of a Particle at the end of this book.

It is advisable for the beginners first to read carefully the Differential Calculus, then to begin the Integral Calculus, otherwise it is impossible for them to understand the latter.

In conclusion, I earnestly request all learned gentlemen to understand, that the book is not written to show off talent, but to encourage and incite our own countrymen towards the cultivation of Western science. Why should we not improve our own language and advance our own countrymen with the aid of Western science to the attainment of which we are applying our heart and soul?

Now-a-days there being more mutual communication between Europeans and Indians, the Europeans are very much interested in the study of Sanskrit and Hindi. Therefore this treatise will be also useful to those Europeans who are interested in the history and development of Indian Mathematics.

I shall consider my labour not to have been in vain, even if my treatise should have no other result than to incite others to criticise my work and to produce more perfect treatises on the subject.

SUDHÁKARA DVĪVEDĪ

किञ्चिन्निवेदनम्

वाराणसेयराजकीयसंस्कृतपरीक्षायां गणितपरीक्षापाठ्यग्रन्थेषु गुरुवर म. म. सुधाकरद्विवेदिनश्चलराशिकलनस्य निर्धारणं जातम् । १९९५ ईशवीये वर्षे राजकीया-
ज्ञया मुद्रितस्यास्य ग्रन्थरत्नस्यालभ्यत्वेन पुनर्मुद्रणस्यावश्यकत्वात् सरस्वतीभवनसिरी-
जाध्यक्षैस्तत्रैवास्य मुद्रणं समाप्तम् । गणितविषये प्रतिदिनं समुन्नतिर्दृश्यते, अतः
१९९५ ईशवीये मुद्रिते पुस्तके या शैली स्वीकृता तत्रेदानीं बहुत्र परिवर्तनं जातम् ।
तथापि परमविद्वद्भिर्महामहोपाध्यायैः स्वीकृतां शैलीं परिरक्ष्यैवास्य मुद्रणं संपादितम् ।
ग्रन्थान्ते प्राचीननवीनपरिपाट्योर्भेदं ग्रन्थग्रन्थिमोचनं च यथामति प्रदर्शयिष्ये ।
अतिशीघ्रतया संमुद्रितेऽस्मिन् दृष्टिदोषात्कण्टकदोषाद्वा यदि कुत्रापि त्रुटिः संलक्षिता भवे-
त्तत्कृपया क्षमणीयोऽस्तेऽस्व्या च कृपालुभिर्विद्वद्भिः । अत्र हृदयतः काशिकराजकीयसंस्कृत
महाविद्यालयाध्यक्षेभ्यः परमविद्यारसिकेभ्यो विद्वद्वरेभ्यो डा० श्रीमङ्गलदेवशास्त्रिवर्येभ्यो
धन्यवादान् वितरामि येषां कृपालवेनैवेदानीं गणितशास्त्रस्याभ्युदयो दृश्यते संस्कृत-
विद्याजगति ।

इति निवेदयते
बलदेवमिश्रः

विषयसूचनिका (Contents)

अध्याय	पृष्ठ
१—चलराशिकलन का अभिप्राय और साधारण चलानयन .	१ - ४१
२—अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन } (Rational Fraction) }	४२ - ८१
३—लघूकरण परम्परा (Formulae of Reduction) .	८२ - १०६
४—प्रकीर्णक (Miscellaneous Remarks)	१०७ - १४४

भूमिका ।

चलनकलन (Differential calculus) की भूमिका में विशेष रूप से लिख आये हैं कि यूरोप में यह विद्या कैसे फैली और भारतवर्ष में सब से पहले किस विद्वान् के ग्रन्थ में चलनकलन (Differential Calculus) और चरराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सिद्धान्त पाये जाते हैं । यहां पर इतना ही आवश्यक समझ कर लिखा जाता है कि विद्वान् लोग यह न समझें कि यह ग्रन्थ किसी अङ्गरेज़ी ग्रन्थ का अनुवाद और संक्षिप्त रूप है किन्तु जिसमें पढ़ने वालों को सब सिद्धान्तों से भली भांति परिचय हो जाय और उदाहरणों के उत्तर निकालने में संशय न हो इस लिये इसमें थोड़ा बहुत जहां तक हो सका है चरराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सभी सिद्धान्तों को उदाहरण समेत यूरोप की युक्ति और अपनी कल्पना के बल से नूतन लघु प्रकार से दिखलाया है ।

जैसे $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$ इसकी सिद्धि के लिये टाडहण्टर (Todhunter) साहब और विलियमसन (Williamson) साहब ने $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{ल} - \text{य}$, यह कल्पना किया । हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}$
 $= \frac{(\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})}{\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$ ऐसा कर तब चरराशि को सिद्ध किया । प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने पहले $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{र}$ तब $\text{य}^2 \pm \text{अ}^2 = \text{र}^2$. \therefore ताय = २र तार वा यताय = रतार इस लिये यताय + रताय = र तार + र ताय . \therefore ताय = $\frac{\text{र}(\text{तार} + \text{ताय})}{\text{य} + \text{र}}$

इसका उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{र}(\text{तार} + \text{ताय})}{\text{र}(\text{य} + \text{र})} = \int \frac{\text{ताय} + \text{तार}}{\text{य} + \text{र}} = \text{ला}(\text{य} + \text{र})$$

प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने असंभव संख्या का भी उत्थापन दे कर $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2 + \text{अ}^2}$ इस का मान इस प्रकार से सिद्ध किया है कि

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{य^2 + अ}} = \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{अ - (य\sqrt{-१})^2}} = \frac{१}{\sqrt{-१}} \int \frac{\text{ताय}\sqrt{-१}}{\sqrt{अ - (य\sqrt{-१})^2}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{-१}} \text{ज्या}^{-१} \frac{य\sqrt{-१}}{अ} \text{ परन्तु डेमाइवर के सिद्धान्त से}$$

$$\text{कोज्याष} - \text{ज्याप}\sqrt{-१} = इ^{-१}\sqrt{-१}$$

$$\text{वा, } -\text{ष}\sqrt{-१} = \text{ला (कोज्याष} - \text{ज्याप}\sqrt{-१})$$

कल्पना करो कि

$$\text{ज्याष} = \frac{य}{अ}\sqrt{-१}, \text{कोज्याप} = \sqrt{१ + \frac{य^2}{अ^2}} - \sqrt{-१} = \frac{१}{\sqrt{-१}}, \text{प} = \text{ज्या}^{-१} \frac{य\sqrt{-१}}{अ}$$

$$\text{वा, } \frac{१}{\sqrt{-१}} \text{ज्या}^{-१} \frac{य\sqrt{-१}}{अ} = \text{ला} \left(\sqrt{१ + \frac{य^2}{अ^2}} - \frac{य}{अ}(\sqrt{-१}) \right)^2$$

= ला $(\sqrt{अ^2 + य^2} + य) - ला अ$ स्थिराङ्क को निकाल देने से पहिले ही के ऐसा फल उत्पन्न हुआ ।

ऊपर जितनी युक्तियाँ दिखलाई गई हैं वे कभी मन में नहीं आ सकतीं जब तक यह ज्ञान न हो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = \text{ला}(\sqrt{य^2 \pm अ^2} + य)$ इस लिये यहाँ पर हमने नया यह प्रकार ९वें प्रक्रम में लिखा है कि

कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(य)} = \text{ला} \{ \text{फ}(य) + र \}$ जहाँ र, य का कोई फल है तो तात्कालिक गति से $\frac{\text{ताय}}{\text{फ}(य)} = \frac{\text{फ}'(य)\text{ताय} + \text{तार}}{\text{फ}(य) + र} \therefore \text{फ}(य)\text{ताय} + \text{तायर} = \text{फ}'(य)\text{ताय} + \text{तार}$ पक्षान्तरानयन और परस्पर भाग

देने से $\frac{\text{ताय} - \text{तार}}{\text{फ}(य)\text{फ}(य) - र} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(य)}$ अब यहाँ यदि $\text{फ}'(य)\text{फ}(य) = य$ तो

$$\frac{\text{ताय} - \text{तार}}{य - र} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(य)} \therefore \int \frac{\text{ताय} - \text{तार}}{य - र} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(य)}$$

$$\text{वा ला}(य - र) = \text{ला} \{ \text{फ}(य) + र \}$$

$$\therefore य - र = \text{फ}(य) + र$$

$$र = \frac{य - \text{फ}(य)}{२} \text{ और } \text{फ}(य) + र = \frac{य + \text{फ}(य)}{२}$$

$$\text{इसलिये } \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला} \left(\frac{\text{य} + \text{फ(य)}}{२} \right) = \text{ला} \{ \text{य} + \text{फ(य)} \} - \text{ला } २$$

ला २ स्थिराङ्क को निकाल देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला} \{ \text{य} + \text{फ(य)} \} \text{ यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हुआ अर्थात् } \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$$

इसका मान अवश्य ला { य + फ(य) } इसके तुल्य होगा यदि फ(य)फ'(य) = य हो तो ।

गणितज्ञों के बीच स्पष्ट है कि मेरा प्रकार एक प्रकार का सिद्धान्त है जो कि नियम से दिखलाता है कि जहाँ जहाँ फ(य) फ'(य) = य ऐसा होगा तहाँ तहाँ ही चलराशि का मान ला { य + फ(य) } यह होगा ।

इसी प्रकार इस ग्रन्थ में बहुत नई युक्तियाँ दिखलाई गई हैं ।

इस के अन्त में वैशेषिकलन (Calculus of variations) और एक परमाणु की गतिविद्या (Dynamics of a particle) के भी अनेक सिद्धान्त लिखे गये हैं जिनके बल से अनेक चमत्कृत उदाहरण के उत्तर सहज में निकल आते हैं ।

विद्यार्थियों के अभ्यास के लिये इसमें अनेक उदाहरण लिखे गये हैं जिनके अभ्यास से सब सिद्धान्तों से भली भाँति परिचय हो सकता है ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि पहले चलनकलन (Differential Calculus) को अच्छी तरह से सीखकर तब इसको पढ़ें अन्यथा इसका आना अत्यन्त दुर्घट है ।

अन्त में विद्वानों से यह सविनय प्रार्थना है कि मैंने अपनी पाण्डित्य दिखलाने के लिये इस ग्रन्थ को नहीं बनाया है किन्तु अपने देशवासियों के हृदय में यूरोप की विद्या का विशेष उत्साह दिलाने के लिये कि आप लोग कठिन परिश्रम से तन धन मन देकर जो यूरोप की विद्या सीखी उससे क्या नहीं अपनी भाषा की पुष्टि कर अपने देश भाइयों का उपकार करते ।

भारतवर्ष में यूरोप के लोगों का अब विशेष संबन्ध होने से यूरोप के विद्वान् लोग भी संस्कृत और हिन्दी की ओर विशेष ध्यान देने लगे इसलिये यूरोप के लोगों को भी हिन्दी में यह नया ग्रन्थ यूरोपियन रीति से कहाँ कहाँ विशेष बातें प्रकाश करता है इसका परिचय करने के लिये इस ग्रन्थ को पढ़ने से विशेष उपकार होगा ।

यदि विद्वान् लोग खण्डन की बुद्धि से भी मेरे ग्रन्थ को एक वार आद्यन्त पढ़ेंगे तो भी मैं अपने परिश्रम को सफल समझूंगा ।

दोहा ।

गणित पयोनिधि सविधि मथि काढ़ी सुधा सुहीर ।

भणित सुधाकर नहिं सुधा वसुधा मथि हे धीर ॥ १ ॥

कँल न परत निज कँलन सों कँलन बिना जौं तात ।

कँल न कहहु कँल कँलन हित कँलन देहु थेहि प्रात ॥ २ ॥

सुधाकर द्विचेदी ।



-
- १ कल = विश्राम, = आराम = चैन ।
 - २ कलन = करन = कर (हाथ) का बहुवचन ।
 - ३ कलन = कलना = गणना = हिसाब करना ।
 - ४ कल दूसरा आनेवाला दिन ।
 - ५ कल = सुन्दर = बढ़ियाँ ।
 - ६ कलन = चलराशिकलन = यह ग्रन्थ ।
 - ७ कलन = करन = कर्ण = कान ।

विशेष वर्णन ।

अध्याय १ ।

प्रक्रम ।	पृष्ठ ।
१ । चलनकलन और चरराशिकलन में सम्बन्ध	... १
२ । \int_a^k फा(य) ताय इस का अर्थ	... १—२
३ । \int_0^y फा(य) ताय इस का रूपान्तर	... २—३
४ । \int फा(य) ताय इस को दिखाना कि फ(य) के समान है	३
५ । चरराशिकलन का अभिप्राय	... ३—५
६ । फ + स्थिर इस में स्थिर का मान जानने के लिये प्रकार	५
७ । साधारण गतियों से चलानयन	... ५—६
८ । चलानयन के स्मरण के लिये श्लोक और दोहे	... ६—७
८ । अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण	... ८—१४
९ । $\int \frac{ताय}{फ(य)}$ इस का मान जानना जहां फ'(य) फ(य) = य,	१४—१६
१० । खण्डचलानयन (Integration by parts) और उस के उदाहरण	... १६—१८
११ । दूसरे प्रकार का खण्डचलानयन	... १८
१२ । चलानयन में विशेष, खण्डचलानयन का श्लोक और दोहा, व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण और अभ्यासार्थ प्रश्न	... १८—३४

द्वितीयाध्याय २ ।

१३ । अकरणीगत भिन्नसंबन्ध का चलानयन यदि तात्कालिक	
संबन्ध $\frac{अ + कय + खय^२ + \dots + पय^म}{अ + कय + खय^२ + \dots + पय^न}$ ऐसा हो	... ३५—३६
१४ । यदि संबन्ध का मान $\frac{फ(य)}{(य-क_१)^n फा(य)}$ ऐसा हो तो चलानयन	३६—३७

प्रक्रम ।	पृष्ठ ।
१५। लाघव से आ _१ , का _१ इत्यादि के मान और कुल उदाहरण	... ३७—३९
१६। यदि फा(य) = (य—क _१) ⁿ फि(य) यदि ऐसा हो तो चलानयन और उदाहरण	... ३९—४१
१७। हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो तब चलानयन और उदाहरण	... ४१—४४
१८। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव मान त बार हो तो चलानयन और उदाहरण	... ४४—४८
१९। अकरणीगत भिन्न संबंध में विशेष	... ४९
२०। ऊपर के प्रक्रमों से अनेक चलानयन	... ४९—५०
२१। $\frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})^m(\text{य}-\text{क})^n}$ इस का सहज में चलानयन	... ५०—५१
२२। $\frac{\text{य}^{m+१}\text{ताय}}{(\text{अ} + \text{गय}^n)^n}$ का चलानयन जहां म और न अभिन्न हैं	... ५१
२३। $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^n-१}$ का चलानयन जहां न धन और अभिन्न है	५१—५३
२४। $\int \frac{\text{य}^{m-१}\text{ताय}}{\text{य}^n-१}$ का मान जहां $n > m$... ५३—५५
२५। $\int \frac{\text{य}^{m-१}\text{ताय}}{\text{य}^n+१}$ का मान जहां $n > m$... ५५
२६। $\frac{\text{फ(य)}}{\text{य}^n-१}$ का मान खण्डभिन्नों में	.. ५५—५६
२७। $\frac{\text{फ(य)}}{\text{य}^n+१}$ का मान खण्डभिन्नों में	... ५६
२८। उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	... ५७—६५

तृतीयाध्याय ३।

२९। $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^n}$ का लघूकरण (Reduction)	... ६६—६७
३०। $\int \frac{\text{य}^m\text{ताय}}{(\text{अ}^२ + \text{य}^२)^n}$ का लघूकरण	... ६७—६९
३१। $\int \text{य}^m\text{त}^n$ ताय का लघूकरण जहां	

प्रक्रम ।

पृष्ठ ।

त = आय ^अ + काय ^क ,	.. ६९—७०
३२ । \int य ^म त ^न ताय का लघूकरण जहाँ त = अ + कय + गय ^प	... ७०—७१
३३ । ३१वें प्रक्रम में विशेष	... ७१—७२
३४ । लघूकरण के कुछ उदाहरण	... ७२—७५
३५ । लघूकरण से त्रिकोणमिति संबन्धिफलों का चलानयन,	... ७५—७७
३६ । ३१वें प्रक्रम में और विशेष	.. ७७—७८
३७ । लघूकरण से सहज में सान्तचलानयन, कुछ उदाहरण, और अभ्यास के लिये प्रश्न ७८—८५

चतुर्थाध्याय ४ ।

३८ । $\int_{अ}^{क}$ फ(य) ताय का मान २ प्र० से तथा श्रेढी के योग से जानना	... ८६—८७
३९ । \int फ(य) ताय इस पर से श्रेढी का योग जानना	... ८७—८९
४० । श्रेढी के योग में विशेष	... ८९—९०
४१ । सान्तचल के कुछ सिद्धान्त	... ९०—९२
४२ । सान्तचल के सिद्धान्त में विशेष	... ९२—९३
४३ । $\int_{अ}^{क}$ फ(य) ताय के मान में विशेष	... ९३
४४ । $\int_{अ}^{क}$ फ(य) ताय के मान में दूसरा विशेष	... ९३—९४
४५ । $\int \frac{ताय}{अ^२ + य^२}$ के मान में विशेष	... ९४—९७
४६ । तीन चलों में न्यूनाधिकता का विचार	... ९८
४७ । फ(अ) + फ(अ + १) + फ(अ + २) + ... इस श्रेढी और $\int_{अ}^{\infty}$ फ(य) ताय के मान का विचार	... ९८—९९
४८ । लाय पर से कुछ श्रेढी का विचार	... ९९—१००
४९ । जिस श्रेढी का कोई पद $\frac{१}{फा(य)}$ हो उस के मान का	

प्रक्रम ।	पृष्ठ
विचार	... १००—१०३
५०। टेलर के सिद्धान्त में न से ऊपर के पदों का योग जानना	... १०३—१०४
५१। एक ही गति का प्रकारान्तर से चलानयन करने में विशेष	. १०४—१०५
५२। सान्तचलज्ञान के लिये वर्नली (Bernoulli) की श्रेढी	. १०५—१०६
५३। वार वार चलज्ञान करने का नियम और सङ्केत	. १०६—१०७
५४। वर्नली के श्रेढी की मूल श्रेढी	.. १०७
५५। ५४वें प्रक्रम में विशेष	.. १०८—१०९
५६। \int ज्या ⁿ स ताथ इत्यादि के मान में विशेष	... १०९
५७। क्रिया समेत कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	... १०९—१२०

श्रीः ।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

चलराशिकलन ।

श्लोक ।

यल्लीला विमला विलोक्य विपुलप्रालेयबालालये
भूपालेन्द्रललाटलालनकलालेपाङ्कितक्षमातले ।
उल्लङ्घ्य स्वकुलालिकूलकलितां लज्जानदीं मैथिली
यल्लोकाऽऽकुलिता चचाल चलवद्रामाय तस्मै नमः ॥१॥

१ प्र० । जैसे चलनकलन में स्वतन्त्रराशि के फलों पर से उनकी तात्कालिकी गति जानने के लिये अनेक प्रकार का वर्णन है उसी प्रकार से इस चलराशिकलन में फलों की तात्कालिकी गति पर से उन फलों के जानने के लिये अनेक प्रकार लिखे हैं । ऐसी दशा में चलराशिकलन को चलनकलन का उलटा कह सकते हैं ॥

२ । कल्पना करो कि फ(य) का तात्कालिक संबंध फा(य) है तो चलनकलन से $\frac{फ(य+च)-फ(य)}{च} = फा(य) + अ$; (यहां जब च = ० = ताय तो अ = ०) इस लिये

$$फ(य+च)-फ(य) = च \{ फा(य) + अ_1 \}$$

$$फ(य+२च)-फ(य+च) = च \{ फा(य+च) + अ_2 \}$$

$$फ(य+३च)-फ(य+२च) = च \{ फा(य+२च) + अ_3 \}$$

... ..

$$फ(य+nच)-फ \{ य+(n-१)च \} = च [फा \{ य+(n-१)च \} + अ_n]$$

दोनों पक्षों को जोड़ने से

$$फ(य+nच)-फ(य) = च \{ फा(य) + फा(य+च) + \dots \}$$
$$+ च(अ_1 + अ_2 + अ_3 + \dots \}$$

इस में य, य+च, य+२च,.....य+नच, इत्यादि के स्थान में अ, इ, उ,.....क इत्यादि का उत्थापन देने से

फ(क)-फ(अ) = च { फा(अ) + फा(इ) + फा(उ) + ... } + च(अ_१ + अ_२ + ...)
अब यहाँ यदि च = ० अर्थात् ताय के समान कल्पना करो तो

$$फ(क) - फ(अ) = फा(अ) ताय + फा(इ) ताय + फा(उ) ताय + ...$$

ऐसा होगा । यहाँ जब य + नच = क और य = अ, ∴ $\frac{क-अ}{न} = च$ इससे यह

सिद्ध होता है कि फल के तात्कालिक संबंध में स्वतन्त्र राशि के स्थान में क्रम से अ, अ + $\frac{क-अ}{न}$, अ + २ $\frac{क-अ}{न}$, अ + ३ $\frac{क-अ}{न}$, ... क-च, का उत्थापन देकर

अलग अलग मान ले आओ फिर उन मानों को च से गुणकर जोड़ दो, योग में च के स्थान में शून्य अर्थात् ताय का उत्थापन दो तो योग, फल के उन दो मानों के अन्तर के तुल्य होगा जो कि स्वतन्त्र राशि के स्थान में अ, और क के उत्थापन से उत्पन्न होंगे । इस योग को संस्कृत में आढ्य भी कहते हैं इस लिये लाघव से आढ्य के आदि अक्षर को लुप्ताकार के रूप में लिखने से पूर्व योग को

$\int_{अ}^{क} फा(य) ताय$ ऐसे लिख सकते हैं । यहाँ $\int_{अ}^{क} फा(य) ताय$ इस से यह सम-

झना चाहिये कि फा(य)ताय के य के स्थान में अ, अ + ताय, अ + २ ताय, अ + ३ ताय, ... क-च, का उत्थापन देने से, जितने मान हैं उन सब का योग है । इस लिये प्रकारान्तर से जो योग पहले सिद्ध हुआ है इसे उसके समान करने से

फ(क) - फ(अ) = $\int_{अ}^{क} फा(य) ताय$ ऐसा हुआ । इस में यदि क के स्थान में

य, और अ के स्थान में शून्य का उत्थापन दें तो फ(य) - फ(०) =

$$\int_{०}^{य} फा(य) ताय \dots (१)$$

३। चलनकलन से सिद्ध है कि फ(य) में केवल य चलराशि है और स्थिराङ्क हैं इस लिये फ(य) में य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से फ(०) यह अवश्य शून्य वा किसी स्थिराङ्क के तुल्य होगा । इस स्थिराङ्क को यदि स्थि

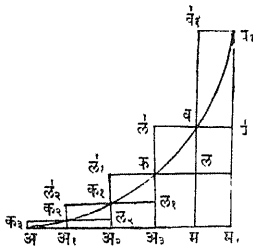
कहो तो दूसरे प्रक्रम का (१) समीकरण $f(y)$ —स्थि = $\int_0^y f(x) dx$ ऐसा हुआ इस में पक्षान्तरानयन से $f(y) = \frac{d}{dy} \int_0^y f(x) dx + स्थि$ इसे लाघव से $f(y) = \int_0^y f(x) dx + स्थि$ ऐसा लिखते हैं ।

४। जब $f(y) = \int_0^y f(x) dx + स्थि$ तो दोनों की तात्कालिकी गति निकालने से $\frac{d}{dy} \{ f(y) \} = f(y) = \frac{d}{dy} \{ \int_0^y f(x) dx + स्थि \} = \frac{d}{dy} \{ \int_0^y f(x) dx \} + \frac{d}{dy} स्थि = \frac{d}{dy} \{ \int_0^y f(x) dx \}$ इस लिये

$\int_0^y f(x) dx$ यह अवश्य $f(y)$ के समान हुआ । इस पर से यह भी कह सकते हो कि जिस फल की तात्कालिकी गति $f(y)$ है वह फल $\int_0^y f(x) dx$ के समान है वा $\int_0^y f(x) dx + स्थि$ इसके समान है ।

चलराशिकलन का अभिप्राय ।

५। नीचे लिखे हुए उदाहरण से विद्यार्थियों को स्पष्ट जान पड़ेगा कि चलनकलन और चलराशिकलन में क्या भेद है ।



कल्पना करो कि अक, क, कव एक ऐसा वक्र है (जिसमें अ म = य, और व म = र,) कि जिसके भुज, कोटि और चाप से जो वक्र त्रिभुज उत्पन्न होता है उस का क्षेत्रफल सर्वदा इ गुणित भुजघन के समान होता है तो बतावो कि य भुज में कोटि का क्या मान है ? यहाँ इ कोई स्थिर संख्या है ।

कल्पना करो कि अम = य, वम = र, तो अवम वक्रत्रिभुज का फल प्रश्न के अनुसार इय^३ और अव, म, का क्षेत्रफल इ(य + मम_२)^३ होगा इस लिये इन दोनों का अन्तर, तुल्य हुआ व, व म म, के, अधिक हुआ वव, म, आयत से और अल्प हुआ व, व, म, म आयत से तब

$$इ (य + म म_२)^३ - इ. य^३ > वम \times मम_२ \text{ और } < व_२ म_२ \times मम_२$$

$$म म_२ \text{ का भाग दे देने से } व, म_२ > इ \left\{ \frac{(य + म म_२)^३ - य^३}{म म_२} \right\} < वम, \text{ इसमें}$$

$$\text{यदि } मम_२ = ० \text{ तो } व, म_२ = वम \text{ और } इ \left\{ \frac{(य + म म_२)^३ - य^३}{म म_२} \right\} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} (इय^३)$$

चलनकलन से । इस लिये चलनकलन से यह बात सिद्ध होती है कि फल के तात्कालिकसंबंध के समान r का मान है अर्थात् $r = ३ इ य$ । इस प्रकार इस प्रश्न का उत्तर चलनकलन से सिद्ध हुआ ।

अब इसी वक्र में यदि ऐसा प्रश्न किया जाय कि एक वक्रक्षेत्र की कोटि गुणित त्रिगुणितभुजवर्ग के तुल्य है तो भुज, कोटि और वक्रकेचाप से जो त्रिभुज होगा उसका क्या क्षेत्रफल होगा ? इस का क्षेत्रफल जानने के लिये $अम = य$, कान तुल्य समान विभाग करो और मानो कि उन विभागों का मान क्रम से $अ_१, अ_२, अ_३, अ_४, अ_५, म$, हैं जहाँ $\frac{य}{न} = अ_१, अ_२, अ_३, अ_४, अ_५, म$, तो वक्रक्षेत्र के

लक्षण से क्र. $अ_१ = ३ इ \left(\frac{य}{न}\right)$, क्र. $अ_२ = ३ इ \left(\frac{२य}{न}\right)$, ..., व $म = ३ इ \left(\frac{न.य}{न}\right)$,

इन सब को $\frac{य}{न}$ से गुण कर जोड़ देने से, क्र. $अ_१, ल_१, अ_२, अ_३, अ_४, अ_५, म$, इत्यादि आयतों के क्षेत्रफल का योग

$$\begin{aligned} &= ३ इ \frac{य}{न} \left(\frac{य}{न}\right) + ३ इ \frac{य}{न} \left(\frac{२य}{न}\right) + \dots + ३ इ \frac{य}{न} \left(\frac{न.य}{न}\right) \\ &= ३ इ \frac{य^३}{न^३} \left(१ + ४ + ९ + \dots + न^२ \right) = ३ इ \frac{य^३}{न^३} \frac{न}{२} (न + १) \frac{(२न + १)}{३} \\ &= ३ इ \frac{य^३}{२न^३} \left(\frac{२न^३ + ३न + १}{३} \right) = इ \frac{य^३}{२} \left(२ + \frac{३}{न} + \frac{१}{न^३} \right) \end{aligned}$$

इस समीकरण में ज्यों ज्यों $न$ की संख्या बढ़ते जायेंगे त्यों त्यों क्र. $ल_१, ल_२, ल_३, ल_४, ल_५, ल_६, ल_७, ल_८, ल_९, ल_{१०}$, इत्यादि वक्र के पास पास आते जायेंगे इस लिये यदि $न = \frac{१}{०}$ तो ठीक वक्रत्रिभुज का फल = $इय^३$ हुआ परन्तु यदि इस का तात्कालिक संबंध निकालो तो $\frac{ता}{ताय} (इय^३) = ३ इ य$ यह तात्कालिक संबंध वक्र की कोटि के समान होता है इस लिये ४ प्रक्रम से $इय^३ = \sqrt[३]{३ इ य}$ ताय ऐसा हुआ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि तात्कालिक संबंध को उस वक्र की कोटि कल्पना करें जो कि मूलबिन्दु में होकर जाता हो तो जिस फल का यह तात्कालिक संबंध है वह फल उस वक्र त्रिभुज का फल होगा जो कि भुज, कोटि और वक्र के चाप से बनता है । अब जिस प्रकार से—

$३ इ य$ ताय पर से $इय^३$ का मान निकले उस प्रकार का जो वर्णन करे उसको चलराशिकलन कहते हैं । इस उदाहरण से स्पष्ट है कि यदि चलनकलन,

और चलराशिकलन का लक्षण लाघव से कहें तो ऐसा होगा कि स्वतन्त्रराशि के फल पर से उसकी तात्कालिकी गति ले आवे उसे चलनकलन और तात्कालिकी गति पर से जो स्वतन्त्रराशि का फल ले आवे उसे चलराशिकलन कहना चाहिये ।

६। चलनकलन से सिद्ध है कि ता { फ(य) + स्थि } = ताफ (य) इस लिये \int ताफ(य) = फ(य), वा फ (य) + स्थि इस से यह समझना चाहिये कि तात्कालिकी गति पर से जो फल निकलता है उसमें यदि स्थिर संख्या जोड़ दें तो जोड़े हुए फल की भी वही तात्कालिकी गति आवेगी परन्तु चलराशिकलन से तात्कालिकी गति पर से जो फल आते हैं वे शुद्ध विना स्थिर के जोड़े आते हैं। विद्यार्थियों को चाहिये कि सर्वत्र जहां तात्कालिकी गति पर से चलराशिकलन के प्रकार से फल सिद्ध हो वहां उस फल में कोई स्थिरसंख्या भी जोड़ें जिस स्थिर का मान, फल में स्वतन्त्रराशि के स्थान में शून्य का वा किसी विशेष संख्या का उत्थापन देने से, ज्ञात हो सकता है। जैसे ५ प्रक्रम के उदाहरण में फल = $\int ३ इय^२$ ताफ = फ + स्थि = इय^३। अब फ + स्थि = इय^३ इस समीकरण में यदि य = ० तो क्षेत्र देखने से स्पष्ट है कि क्षेत्रफल शून्य होगा

∴ ० + स्थि = इ (०)^३ ∴ स्थि = ०, इसी प्रकार स्वतन्त्रराशि में ऐसी संख्या का उत्थापन देना चाहिये जिसमें फल का मान व्यक्त हो फिर उस मान पर से स्थिराङ्क का ज्ञान शीघ्र हो जायगा ।

७। चलनकलन की विपरीत क्रिया से स्पष्ट है कि,

$$\int \text{स्थिफ(य)ताय} = \text{स्थि} \int \text{फ(य) ताय} \dots$$

$$\int \{ \text{फ(य)ताय} + \text{फा(य) ताय} \} = \int \text{फ(य) ताय} + \int \text{फा(य) ताय}$$

$$\int \text{य}^{\text{म}} \text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{लाय} ।$$

$$\int \text{अय} \text{ताय} = \frac{\text{अय}}{\text{लाइअ}}, \int \text{इय} \text{ताय} = \text{इय} ।$$

$$\int \text{ज्यायताय} = -\text{कोज्याय}, \int \text{कोज्यायताय} = \text{ज्याय} ।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्या}^२ \text{य}} = \text{स्पय}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्या}^२ \text{य}} = -\text{कोस्पय} ।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^२ - \text{य}^२}} = \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ वा } = -\text{कोज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

$$\int \frac{ताय}{अ^२ + य^२} = \frac{१}{अ} \operatorname{स्प}^{-१} \frac{य}{अ} वा = -\frac{१}{अ} \operatorname{कोस्प}^{-१} \frac{य}{अ}$$

८ । इनका स्मरण होने के लिये श्लोक और द्वांहे ।

श्लोक ।

चलः स्थिरघ्नविहतश्चलोऽन्यो यदि तद्रतिः ।

तुल्याऽऽद्यचलगत्या स्यात् स्थिरघ्नहतया तथा ॥ १ ॥

यद्रतिर्भुक्तियोगेन समा स्याद्यत्र तन्मितिः ।

भुक्त्युत्थचलयोगेन समाना चलकोविद ॥ २ ॥

सैकघातश्चलस्याप्तः सैकतद्घातसंख्यया ।

चलोऽन्यो यद्गती राशिघातराशिजवाहतिः ॥ ३ ॥

यस्य भुक्तौ हरगतिर्लवमानं भवेद्धि सः ।

हरस्य लघुरिक्थेन समानो भवति ध्रुवम् ॥ ४ ॥

चलराशिसमः स्थिराङ्कघातः

प्रथमस्तद्धतराशिभुक्तिरस्ति ।

अपरस्य गतिस्तदा स्थिराङ्क—

लघुरिक्थात् इहाऽऽद्य एव चान्यः ॥ ५ ॥

चलज्या गुणिता भुक्तिर्यद्रतिस्तन्मितिर्भवेत् ।

चलकोटिज्यया तुल्या क्षयगा चलयुक्तिः ॥ ६ ॥

चलकोटिज्यया निम्नी भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत् ।

चलजीवासमानं तन्मानं ज्ञेयं मनीषिभिः ॥ ७ ॥

चलकोटिज्यकावर्गभक्ता भुक्तिर्हि यद्रतिः ।

चलजस्पर्शरेखैव तन्मानं स्याच्चल्लोक्तिः ॥ ८ ॥

चलज्याकृतिसंभक्ता भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत् ।

तन्मानं चलजा कोटिस्पर्शरेखा क्षयात्मिका ॥ ९ ॥

राशिवर्गोनितस्थैर्यवर्गमूलहता गतिः ।

यद्रतिस्तन्मितिः स्थैर्यभक्तराशैर्धनुर्भवेत् ॥ १० ॥

स्थिरचञ्चलवर्गयोगभक्ता

गतिरस्तीह गतिर्यदान्यराशेः ।

स्थिरभक्तचलस्य यद्दनुर्भा—

शकलैस्तत्स्थिरभक्तमन्यमानम् ॥ ११ ॥

दोहा ।

जौं चल थिर से गुणित वा भाजित हो चल आन ।
 आदि गती स्थिरगुणित वा भाजित ता गति जान ॥ १ ॥
 कइ गति के युति तुल्य हो जाकी गति ता मान ।
 सब गति के चल योगसम जानहु सकल सुजान ॥ २ ॥
 राशिघातहत राशिगति जाकी गति सो जान ।
 सैकघात हत राशि को सैकघातसम मान ॥ ३ ॥
 जाकी गति में हर गती अंशमान जौं होय ।
 ई आधार लघुरिक्थ जो हर को है वह सोय ॥ ४ ॥

चौपाई ।

चलराशी सम थिर को घाता । आदि सो गुणित राशिगति ताता ॥
 जाकी गति सो आदि प्रमाना । थिर लघुरिक्थ विभाजित जाना ॥ ५ ॥

दोहा ।

चलजीवा से गुणित चलगति जाकी गति होय ।
 चलकोटिज्या के करहु ऋण तुम जानहु सोय ॥ ६ ॥
 चलकोटिज्यागुणित चलगति जाकी गति होय ।
 चलजीवा के तुल्य तेहि कहहु युक्ति जिय जोय ॥ ७ ॥
 चलकोटिज्यावर्गहत चलगति जाकी भुक्ति ।
 स्पर्शरेखिका चलहि को ताहि कहहु लखि सूक्ति ॥ ८ ॥
 चलजीवाकृतिभक्त जो चलगति जाकी भुक्ति ।
 चल को कोटिस्पर्श ऋण रेखा कहु लखि युक्ति ॥ ९ ॥
 स्थिरकृति में चलवर्ग ऋण तेहि पदहत गति होय ।
 जाकी स्थिरहत चलहि को चाप कहहु तुम सोय ॥ १० ॥

चौपाई ।

स्थिरचञ्चलकृतियोगविभाजित ।
 चलगति जाकी गति सो साधित ॥
 स्थिरहत चलको चाप बनावहु ।
 स्पर्शखण्ड से सो स्थिर भाजहु ॥ ११ ॥

८ । इस प्रक्रम में पूर्व प्रकारों का अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

उदाहरण ।

(१) $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{य}}$ इस गति की चलराशि ले आओ ? ।

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताय}}{\sqrt{य}} = \text{ताय} \cdot य^{-\frac{1}{2}} \therefore \int \text{ताय} य^{-\frac{1}{2}} = २य^{\frac{1}{2}}, \text{ (३ सूत्र से)}$$

२। ताय $(क + अ य^n)^{मय^g}$, इस की चलराशि ले आओ ? ।

यहाँ द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$\begin{aligned} (क + अ य^n)^m &= क^m + मक^{m-1}(अय^n) + \frac{म(म-१)}{२}क^{m-२}(अय^n)^२ + \dots \\ \therefore \text{ताय}(क + अ य^n)^{मय^g} &= क^मय^g\text{ताय} + अमक^{म-१}य^{n+g}\text{ताय} \\ &+ अ^२\frac{म(म-१)}{२}क^{म-२}य^{२n+g}\text{ताय} + \dots \\ \therefore \int \text{ताय}(क + अ य^n)^{मय^g} &= \int क^मय^g\text{ताय} + \int अमक^{म-१}य^{n+g}\text{ताय} + \dots \\ &= क^म \int य^g\text{ताय} + अ म क^{म-१} \int य^{n+g}\text{ताय} \\ &+ अ^२ \frac{म(म-१)}{२} क^{म-२} \int य^{२n+g}\text{ताय} + \dots \quad \text{(२ सूत्र से)} \\ &= \frac{क^म}{ग+१} य^{ग+१} + \frac{अ म क^{म-१}}{न+ग+१} य^{न+ग+१} + \\ &\frac{अ^२ म (म-१) क^{म-२}}{(२न+ग+१) २} य^{२न+ग+१} + \dots \text{(३ सूत्र से)} \end{aligned}$$

३। $\frac{य^म\text{ताय}}{(अ + क य)^n}$ इस की चलराशि बताओ ? यहाँ म और न दोनों अभिन्न और धन संख्या हैं ।

$$\text{यहाँ कल्पना करो कि } अ + क य = ल \therefore य = \frac{ल-अ}{क}, \text{ और ताय} = \frac{\text{ताल}}{क} ।$$

$$\text{इन का उन्थापन देने से } \frac{य^म\text{ताय}}{(अ + क य)^n} = \frac{य^म\text{ताल}}{क.ल^n} = \frac{(ल-अ)^म\text{ताल}}{क^{म+१}ल^n}$$

$$\therefore \int \frac{य^म\text{ताय}}{(अ + क य)^n} = \int \frac{(ल-अ)^म\text{ताल}}{क^{म+१}ल^n} = \frac{१}{क^{म+१}} \int \frac{(ल-अ)^म\text{ताल}}{ल^n},$$

अब इस पर से (द्वियुक्पदसिद्धान्त से) चलराशि जान सकते हो ।

४। कोज्यांय. ताय, ज्यांयताय इन की चलराशि क्या हैं ?

$$\text{यहाँ त्रिकोणमिति से कोज्यांय} = \frac{१ + \text{कोज्या } २ य}{२}, \text{ इस लिये}$$

$$\text{कोज्या}^2 \text{ ताय} = \frac{1 + \text{कोज्या}^2 \text{ य}}{2} \text{ ताय, यहाँ यदि } 2\text{य} = \text{र, तो ताय} = \frac{\text{तार}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \text{कोज्या}^2 \text{ ताय} &= \int \left(\frac{1 + \text{कोज्या}^2 \text{ य}}{2} \text{ ताय} \right) = \int \left(\frac{\text{तार}}{2} + \frac{\text{कोज्या}^2 \text{ र}}{2} \text{ तार} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \text{तार} + \frac{1}{2} \int \text{कोज्या}^2 \text{ र तार} = \frac{\text{र} + \text{ज्यार}}{2} = \frac{2 \text{य} + \text{ज्यार}^2}{2} \text{ (७ सूत्र से)} \end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\text{ज्या}^2 \text{ ताय} = \frac{1 - \text{कोज्या}^2 \text{ य}}{2} \text{ ताय} \therefore \int \text{ज्या}^2 \text{ ताय} = \frac{2\text{य} - \text{ज्यार}^2}{2}$$

५। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{2\text{अय} - \text{य}^2}}$ इस की चलराशि क्या है ?

कल्पना करो कि $\text{य} = \text{अ} - \text{ल}$ \therefore ताय = -ताल,

$$\text{और } \sqrt{2\text{अय} - \text{य}^2} = \sqrt{2\text{अ}(\text{अ} - \text{ल}) - (\text{अ} - \text{ल})^2} = \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{2\text{अय} - \text{य}^2}} &= \int -\frac{\text{ताल}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ}} \\ &= \text{उज्या}^{-1} \frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ (१० सूत्र से)} \end{aligned}$$

६। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}}$ इस की चलसंख्या बतावो ?

कल्पना करो कि $\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} = \text{ल} - \text{य}$ \therefore $\text{य}^2 - 2\text{यल} + \text{ल}^2 = \text{य}^2 + \text{अ}^2$

$$\text{और य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{2\text{ल}} \therefore \text{ताय} = \frac{2\text{ल}^2 \text{ताल} - 2\text{ताल}(\text{ल}^2 - \text{अ}^2)}{2\text{ल}^2}$$

$$= \frac{2\text{ताल}^2(\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{2\text{ल}^2} = \frac{\text{ताल}(\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{\text{ल}^2}, \text{और जब य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{2\text{ल}}$$

$$\therefore \text{ल} - \text{य} = \text{ल} - \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{2\text{ल}} = \frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{2\text{ल}} \text{ इनका उत्थापन देने से}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{ताल}(\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{2\text{ल}^2} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}} = \text{लाल}$$

$$\frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{2\text{ल}}$$

$$= \text{ला}(\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} + \text{य}) \text{ (४ सूत्र से)}$$

७। $\frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}}$ इस की चलसंख्या बतावो ?

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}} &= \frac{\text{कोज्यायताय}}{\text{कोज्या}^2\text{य}} = \int \frac{\text{कोज्यायताय}}{1-\text{ज्या}^2\text{य}} = \int \frac{\text{ताल}}{1-\text{ल}^2} (\text{यदि ल} = \text{ज्याय}) \\ &= \int \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ताल}}{1-\text{ल}} + \frac{\text{ताल}}{1+\text{ल}} \right] = \frac{1}{2} \left[\int \frac{\text{ताल}}{1+\text{ल}} - \int \frac{-\text{ताल}}{1-\text{ल}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{ला} (1+\text{ल}) - \text{ला} (1-\text{ल}) \right\} = \text{ला} \sqrt{\frac{1+\text{ज्याय}}{1-\text{ज्याय}}} \\ &= \text{लाकोस्प} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\text{य}}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{इसी प्रकार } \int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्याय}} = \text{लास्प} \frac{\text{य}}{2},$$

८। $\frac{\text{ताय}}{1-\text{य}^2}$ इसकी चलसंख्या क्या है ?

$$\frac{\text{ताय}}{1-\text{य}^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ताय}}{1-\text{य}} + \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}} \right] \therefore \text{उदाहरण के ऐसा}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{1-\text{य}^2} = \frac{1}{2} \text{ला} \frac{1+\text{य}}{1-\text{य}}, \text{ इस में यदि य} = \text{य}\sqrt{-1}$$

$$\text{तो } \int \frac{\text{ताय}\sqrt{-1}}{1+\text{य}^2} = \frac{1}{2} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}} \text{ वा } \int \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$\text{परन्तु ११ सूत्र से } \int \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}^2} = \text{स्प}^{-1}\text{य}$$

$$\therefore \text{स्प}^{-1}\text{य} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$\text{वा, स्प}^{-1}\text{य} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}} + \text{स्थि}$$

यहां कल्पना करो कि य = स्प प, \therefore स्प⁻¹य = प

$$\text{इस लिये प} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}} + \text{स्थि, यदि प} = 0, \text{ तो य} = 0, \therefore \text{स्थि} = 0$$

$$\text{तब प} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$\text{वा इ } 2\text{प}\sqrt{-1} = \frac{1+\text{स्प प}\sqrt{-1}}{1-\text{स्पप}\sqrt{-1}} = \frac{\text{कोज्या प} + \text{ज्या प}\sqrt{-1}}{\text{कोज्या प} - \text{ज्या प}\sqrt{-1}}$$

$$= \left(\text{कोज्या } \phi + \text{ज्या } \phi \sqrt{-1} \right)^2$$

$$\therefore \text{इ}^{\phi} \sqrt{-1} = \text{कोज्या } \phi + \text{ज्या } \phi \sqrt{-1}, \text{ वा } \text{इ}^{-\phi} \sqrt{-1}$$

= कोज्या ϕ - ज्या $\phi \sqrt{-1}$ (चलनकलन में डेमाइवर का सिद्धान्त देखो)

९। $\frac{\text{ताय}}{\text{य} \sqrt{2\text{अ} - \text{य} - \text{अ}^2}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

कल्पना करो कि $2\text{अ} - \text{य} - \text{अ}^2 = \text{ल}^2 \therefore \frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{2\text{अ}} = \text{य}$

और ताय = $\frac{2\text{लताल}}{2\text{अ}} = \frac{\text{लताल}}{\text{अ}}$

इस लिये $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य} \sqrt{2\text{अ} - \text{य} - \text{अ}^2}} = \int \frac{\frac{\text{लताल}}{\text{अ}}}{\frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{2\text{अ}}} = \int \frac{2\text{ताल}}{\text{अ}^2 + \text{ल}^2}$

= $2 \int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}^2 + \text{ल}^2} = \frac{2}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1} \frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \frac{2}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1} \sqrt{\frac{2\text{अय} - \text{अ}^2}{\text{अ}}}$ (११ सूत्र से)

१०। $\frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{कय}^2}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{कय}^2} = \frac{1}{\text{अ}} \int \frac{\text{ताय}}{1 + \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{य}^2}$, यहाँ यदि $\text{ल} = \text{य} \sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$ तो $\text{य} = \text{ल} \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}$

$\therefore \text{ताय} = \text{ताल} \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}$

इस लिये $\frac{1}{\text{अ}} \int \frac{\text{ताय}}{1 + \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{य}^2} = \frac{1}{\text{अ}} \int \frac{\text{ताल} \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}}{1 + \text{ल}^2} = \frac{\sqrt{\text{अ}}}{\text{अ} \sqrt{\text{क}}} \int \frac{\text{ताल}}{1 + \text{ल}^2} =$

$\frac{1}{\sqrt{\text{अ} \text{क}}} \text{स्प}^{-1} \text{ल} = \frac{1}{\sqrt{\text{अ} \text{क}}} \text{स्प}^{-1} \left(\text{य} \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}} \right)$

११। $\frac{\text{ताय.य}^3}{1 + \text{य}^2}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\frac{\text{य}^4}{1 + \text{य}^2} = \text{य}^2 - \text{य} + \frac{\text{य}}{1 + \text{य}^2}$

इस लिये $\int \frac{\text{य}^4 \text{ताय}}{1 + \text{य}^2} = \int \text{य}^2 \text{ताय} - \int \text{यताय} + \int \frac{\text{यताय}}{1 + \text{य}^2}$

$$= \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2} \log(1+y)$$

१२। (अ + क) ताय इस की चलसंख्या क्या है ?
अ य^४ + क य^३

$$\text{कल्पना करो कि } y = \frac{1}{r} \therefore \text{ताय} = -\frac{\text{तार}}{r}$$

$$\text{इस लिये } \frac{(अ + क)\text{ताय}}{अ य^4 + क य^3} = -\frac{(अ + क)\text{तार}}{r^4 y^4 (अ य^4 + क य^3)} = -\frac{(अ + क) \text{तार}}{(अ य + क)}$$

$$= -\frac{(अ + क)\text{तार}}{अ + क r^4} = -\frac{(अ + क)r \text{तार}}{अ + क r^4}$$

$$\therefore \int \frac{\text{ताय}(अ + क)}{अ य^4 + क य^3} = -(अ + क) \int \frac{r \text{तार}}{अ + क r^4} = -\frac{अ + क}{क} \int \frac{r \text{तार}}{\frac{अ}{क} + r}$$

$$= -\frac{अ + क}{क} \int \left(\text{तार} - \frac{\frac{अ}{क} \text{तार}}{\frac{अ}{क} + r} \right) = -\frac{अ + क}{क} \left(\int \text{तार} - \frac{अ}{क} \int \frac{\text{तार}}{\frac{अ}{क} + r} \right)$$

$$= -\frac{अ + क}{क} \left\{ r - \frac{अ}{क} \sqrt{\frac{क}{अ}} \text{स्प}^{-1} \left(\frac{r \sqrt{क}}{\sqrt{अ}} \right) \right\} = -\frac{अ + क}{क} \left(r - \sqrt{\frac{अ}{क}} \text{स्प}^{-1} \left(r \sqrt{\frac{क}{अ}} \right) \right)$$

$$= -\frac{अ + क}{क} \left(\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{अ}{क}} \text{स्प}^{-1} \left(\frac{\sqrt{क}}{y \sqrt{अ}} \right) \right)$$

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) $\int \frac{\text{ज्यायताय}}{\text{कोज्याय}}$, उ० लाछेय ।

(२) $\int \frac{\text{ताय}}{अय + क \sqrt{य}}$ उ० $\frac{2}{अ} \log(अ \sqrt{य} + क)$

(३) $\int \text{ताय} (\sqrt{य} + \sqrt[3]{य})$ उ० $\frac{2}{3} \frac{य^{3/2}}{3} + \frac{3}{8} \frac{य^{4/3}}{4}$

(४) $\int \text{ताय}(य^{-३} + य^{-१} + अ)$ उ० $\frac{२अ य^३ + २य^२ ला य - १}{२य^३}$

- (५) $\int \frac{\text{ताय}}{अ^2 - य^2}$.. उ०, $\frac{१}{२अ}$ ला $\frac{अ + य}{अ - य}$,
- (६) $\int \frac{\text{ताय.क}}{\text{यलाय}}$ उ०, क. ला (लाय)
- (७) $\int \text{कोस्पयताय}$ उ० लाज्याय
- (८) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{४ - य^2}}$ उ० ज्या^{-१} $\frac{य}{२}$
- (९) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{८ - २य - य^2}}$ उ० ज्या^{-१} $\frac{१ + य}{२}$
- (१०) $\int \frac{\text{ताय}}{१० + २य + य^2}$ उ०, $\frac{१}{३}$ स्प^{-१} $\frac{य + १}{३}$
- (११) $\int \frac{\text{ताय य}^३}{य^२ + ४}$.. उ०, $\frac{य^३}{६} - य^३ + ८य^३ - ३२ला (य^२ + ४)$
- (१२) $\int \frac{५ \text{ ताय}}{४य^३ + य^२}$.. उ० $५(२स्प^{-१} \frac{१}{२य} - \frac{१}{य})$
- (१३) $\int \frac{\text{ताय}}{अ + क य}$.. उ० ला (क $\sqrt{अ + क य}$)
- (१४) $\int \frac{(१०य^१ + ९य^१) \text{ ता य}}{य^{१०} + य^१)^{\frac{३}{१०}}}$ उ० $\frac{९}{३} (य^{१०} + य^१)^{\frac{३}{१०}}$
- (१५) $\int \frac{\left\{ \frac{न.य^{न-१} + (न-१)य^{न-१}}{न} \right\} \text{ताय}}{(य^{न} + य^{न-१})^{\frac{अ}{क}}}$ उ० $\frac{क(य^{न} + य^{न-१}) - क-अ}{न(क-अ)}$
- (१६) $\int \frac{(\sqrt{य^२ + ९} + य)^२ \text{ताय}}{\sqrt{य^२ + ९}}$, उ० $\frac{१}{२} (य + \sqrt{य^२ + ९})^२$
- (१७) $\int \frac{२य \text{ ताय}}{(य^२ + १)^२}$.. उ०, $-\frac{१}{य^२ + १}$
- (१८) $\int \frac{क.य^३ \text{ ता य}}{य^२ + १}$.. उ०, क $(\frac{य^३}{४} - \frac{य^२}{२} + ल\sqrt{य^२ + १})$
- (१९) $\int (अ + य^३) (अ + य) \text{ ताय}$.. उ०, अ^२य + $\frac{अ.य^२}{२} + \frac{अ.य^३}{३} + \frac{य^४}{४}$

$$(20) \int (x^2 + y^2)(x + y) y \, \text{ताय}, \quad \text{उ०, } \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^2 y^2}{3} + \frac{x y^3}{4} + \frac{y^4}{5}$$

$$(21) \int \frac{(1+y)^2(1-y) \, \text{ताय}}{y^3}, \quad \text{.. उ०, } \frac{1}{2} \log \frac{1-y}{1+y} - \frac{1}{2} \frac{1}{y}$$

$$(22) \int \frac{y^2 \sqrt{y} \, \text{ताय}}{1+y}, \quad \text{उ०, } \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}} - 2 \operatorname{स्प}^{-1} y^{\frac{1}{2}},$$

$$(23) \int (a + k y^n)^m \, \text{ताय}, \quad \text{उ०, } \frac{(a + k y^n)^{m+1}}{m+1},$$

उदाहरण

(२४) एक चोर अ स्थान से एक हीरे को चुरा कर भागा । जब अ स्थान से पौन मील दूर जा चुका तब उस को पकड़ने के लिये एक सिपाही अ स्थान से दौड़ा इस सिपाही के प्रतिक्षण की गति चोर की गति से अ स्थान से चोर की दूरी जो हो उतनी गुणित है तो बतावो कि अ स्थान से कितनी दूर पर चोर पकड़ा गया ? । उत्तर, $2\frac{1}{3}$ मील ।

(२५) एक हीरे के मोल की बाढ़ एक राजा के आमदनी की बाढ़ से आमदनी के वर्ग को गुणने से जो हो सो होती है तो बताओ कि जब राजा की आमदनी तीन लाख हो तो हीरे का क्या मोल होगा ?

उत्तर, 9×10^{14} हीरे का मोल ।

९। कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{f(y)} = \text{ला} \{ f(y) + r \}$ जहाँ r , y का कोई फल है तो तात्कालिक गति बनाने से

$$\frac{\text{ताय}}{f(y)} = \frac{f'(y)\text{ताय} + \text{तार}}{f(y) + r} \quad \therefore f'(y)\text{ताय} + \text{ताय} \cdot r$$

= $f'(y)\text{ताय} f(y) + \text{तार}f(y)$, पक्षान्तरानयन से और परस्पर भाग देने से

$$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{f(y) f(y)-r} = \frac{\text{ताय}}{f(y)} \quad \text{यहाँ यदि } f'(y)f(y) = y, \text{ तो}$$

$$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{y-r} = \frac{\text{ताय}}{f(y)} \quad \therefore \int \frac{\text{ताय}-\text{तार}}{y-r} = \int \frac{\text{ताय}}{f(y)}$$

$$\therefore \text{ला}(y-r) = \text{ला} \{ f(y) + r \} \quad \therefore y-r = f(y) + r$$

$$\text{तब } r = \frac{y-f(y)}{2} \quad \text{और } f(y) + r = \frac{y+f(y)}{2}$$

$$\text{इस लिये } \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला} \left(\frac{\text{य} + \text{फ(य)}}{2} \right) = \text{ला} \{ \text{य} + \text{फ(य)} \} - \text{ला}_2$$

$$\text{स्थिराङ्क को छोड़ देने से } \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला} \{ \text{य} + \text{फ(य)} \}$$

$$\text{जैसे (१) उदाहरण, } \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} \text{ यहाँ फ(य) = य, और फ'(य) = १}$$

$$\therefore \text{फ(य) फ'(य) = य, इस लिये } \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{ला} \{ \text{य} + \text{फ(य)} \} = \text{ला } 2 \text{ य}$$

$$= \text{लाय} + \text{ला } 2 \text{ स्थिराङ्क को निकास लेने से } \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{लाय} ।$$

ऐसा ही पहले भी सिद्ध है ।

$$(२) \text{ उदाहरण, } \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} \text{ यहाँ फ(य) = } \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}$$

$$\text{इस लिये फ'(य) = } \frac{\text{य}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} \text{ और फ(य) फ'(य) = य, इस लिये}$$

$$\text{ऊपर की युक्ति से } \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \text{ला} \left(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} \right) \text{ यही पहले भी}$$

सिद्ध हुआ है ।

$$(३) \text{ उदाहरण, } \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(\text{य}^2 \pm 2\text{अय})}} = \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(\text{य} \pm \text{अ})^2 - \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{\text{र}^2 - \text{अ}^2}}$$

यदि $\text{र} = \text{य} \pm \text{अ}$,

$$\text{तब दूसरे उदाहरण से } \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{\text{र}^2 - \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm 2\text{अय}}}$$

$$= \text{ला}(\text{र} + \sqrt{\text{र}^2 - \text{अ}^2}) = \text{ला}(\text{य} \pm \text{अ} + \sqrt{\text{य}^2 \pm 2\text{अय}})$$

(२) उदाहरण की सिद्धि के लिये टाडहण्टर (Todhunter) और विलियमसन (Williamson) साहब ने $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{ल-य}$, यह कल्पना किया ।

$$\text{हाइमर्स (Hymers) ने } \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \frac{(\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})}{\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$$

ऐसा कर तब चलराशि सिद्ध किया, डिमार्गन (Demorgan) ने

पहले $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{र}$ तब $\text{य}^2 \pm \text{अ}^2 = \text{र}^2$.'. $\text{रसताय} = \text{ररतार}$ और

वा, $\text{यताय} = \text{रतार}$ इस लिये $\text{य.ताय} + \text{र.ताय} = \text{रतार} + \text{रताय}$

∴ ताय = $\frac{र(ताय + तार)}{य + र}$ इस का उत्थापन देने से

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = \int \frac{र(ताय + तार)}{र(य + र)} = \int \frac{ताय + तार}{य + र} = ला(य + र)$$

= ला (य + $\sqrt{य^2 \pm अ^2}$) ऐसा सिद्ध किया,

डिमागन साहब ने असंभव संख्या का भी उत्थापन देकर चलराशि ले आने के लिये एक दूसरी रीति लिखी है परन्तु ये सब कल्पनायें शीघ्र मन में नहीं आ सकतीं जब तक कि पहले से यह ज्ञान न हो कि

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = ला (य + \sqrt{य^2 \pm अ^2}) \text{ ऐसा होता है इस लिये हमारी समझ}$$

में इस प्रक्रम के आदि में हमने जो सिद्धान्त लिखा है उस से बहुत ही सहज में चलराशि सिद्ध हो जाता है ।

१०। चलनकलन से सिद्ध है कि ता (च + ज) = ताच·ज + च·ताज

$$\therefore \int ता (च \times ज) = \int ताच \cdot ज + \int च \cdot ताज$$

∴ $\int ताचज = च \cdot ज - \int च \cdot ताज$ इसे खण्डचलानयन कहते हैं इस पर से अनेक उदाहरण की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है जैसे ।

(१) उदाहरण, $\int ज्या^{-१}य ताय$ यहां यदि ताय = ताच और ज्या^{-१}य = ज

$$\text{तो च} = य, \text{ और ताज} = \frac{ताय}{\sqrt{१-य^2}},$$

इस लिये $\int ज्या^{-१}य ताय = च \cdot ज - \int च \cdot ताज$

$$= य \cdot ज्या^{-१}य - \int \frac{यताय}{\sqrt{१-य^2}} = य \cdot ज्या^{-१}य + \sqrt{१-य^2}$$

(२) उदाहरण, $\int ताय \sqrt{य^2 \pm अ^2}$ यहां ताय = ताच ∴ य = च

$$\text{और } \sqrt{य^2 \pm अ^2} = ज \therefore \frac{य \cdot ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = ताज,$$

$$\text{इस लिये, } \int ताय \sqrt{य^2 \pm अ^2} = य \sqrt{य^2 \pm अ^2} - \int \frac{य \cdot ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$$

$$= य \sqrt{य^2 \pm अ^2} - \int \frac{ताय (य^2 \pm अ^2 \mp अ^2)}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$$

$$= y\sqrt{y^2 \pm a^2} - \int \frac{y \sqrt{y^2 \pm a^2} \pm a^2}{\sqrt{y^2 \pm a^2}} dy$$

पक्षान्तरानयन से और ६ प्रक्रम से

$$2 \int \frac{y \sqrt{y^2 \pm a^2}}{y^2 \pm a^2} = y \sqrt{y^2 \pm a^2} \pm a^2 \log (y + \sqrt{y^2 \pm a^2})$$

$$\therefore \int \frac{y \sqrt{y^2 \pm a^2}}{y^2 \pm a^2} = \frac{y}{2} \sqrt{y^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log (y + \sqrt{y^2 \pm a^2})$$

(३) उदाहरण, $\int y \cos y \sin y$ यहाँ ताच = कोज्याअय.ताय

$$\therefore \text{च} = \frac{\text{ज्याअय}}{अ} \text{ और ज} = y \quad \text{ताज} = \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये, } \int y \cos y \sin y = \frac{y \cdot \text{ज्याअय}}{अ} - \int \frac{\text{ज्याअय} \cdot \text{ताय}}{अ}$$

$$= \frac{y \text{ज्याअय}}{अ} + \frac{\text{कोज्याअय}}{अ^2}$$

यदि $\int y^n \cos y \sin y$ तो पूर्व युक्ति से

$$\int y^n \cos y \sin y = \frac{y^n \cdot \text{ज्याअय}}{अ} - \frac{2}{अ} \int y \text{ज्याअय} \sin y$$

$$= \frac{y^n \cdot \text{ज्याअय}}{अ} + \frac{2}{अ} \left(\frac{y \text{कोज्याअय}}{अ} - \frac{\text{ज्याअय}}{अ^2} \right)$$

$$= \frac{y^n \text{ज्याअय}}{अ} = \frac{2y \text{कोज्याअय}}{अ^2} + \frac{\text{ज्याअय}}{अ^3}$$

(४) उदाहरण, $\int y^n \cos y \sin y$ यहाँ भी ताच

= कोज्याअयताय और ज = y^n मानने से

$$\int y^n \cos y \sin y = \frac{y^n \text{ज्याअय}}{अ} - \frac{1}{अ} \int n \cdot y^{n-1} \text{ज्याअय} \sin y$$

$$= \frac{y^n \cdot \text{ज्याअय}}{अ} - \frac{n}{अ} \int y^{n-1} \text{ज्याअय} \sin y$$

फिर $\int y^{n-1} \text{ज्याअय} \sin y$

$$= - \frac{y^{n-1} \text{कोज्याअय}}{अ} + \int (n-1) y^{n-2} \text{कोज्याअय} \sin y$$

$$= - \frac{y^{n-1} \text{कोज्याअय}}{अ} + \frac{n-1}{अ} \int y^{n-2} \text{कोज्याअय} \sin y$$

यों बार बार क्रिया करने से \int च^{कय}कोज्याअयताय इस का मान आजायगा ।

$$\begin{aligned}
 (५) \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} &= \int \left\{ \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \cdot \text{ता} (\text{इ}^{\text{कय}}) \right\} \\
 &= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} - \int \frac{\text{अ} \cdot \text{कोज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} \text{ताय} \\
 &= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} - \int \left\{ \frac{\text{अ} \cdot \text{कोज्याअय}}{\text{क}} \text{ता} (\text{इ}^{\text{कय}}) \right\} \\
 &= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} - \frac{\text{अकोज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} - \int \frac{\text{अ} \cdot \text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} \text{ताय}
 \end{aligned}$$

पक्षान्तरानयन से

$$\begin{aligned}
 &\int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} + \frac{\text{अ}}{\text{क}^२} \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} \\
 &= \frac{\text{अ} + \text{क}^२}{\text{क}^२} \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}}{\text{क}} \left(\text{ज्याअय} - \frac{\text{अ} \cdot \text{कोज्याअय}}{\text{क}} \right) \\
 \therefore \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअय ताय} &= \frac{\text{इ}^{\text{कय}} (\text{क ज्याअय} - \text{अकोज्याअय})}{\text{अ} + \text{क}},
 \end{aligned}$$

११। यह चलनकलन से सिद्ध है कि ता $\left(\frac{\text{च}}{\text{ज}} \right) = \frac{\text{ज} \cdot \text{ताच} - \text{चताज}}{\text{ज}}$

(जहां च, और ज दोनों य स्वतन्त्रराशि के फल हैं)

$$\begin{aligned}
 \text{इस लिये } \int \text{ता} \left(\frac{\text{च}}{\text{ज}} \right) &= \int \frac{\text{जताच} - \text{चताज}}{\text{ज}} = \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} - \int \frac{\text{च} \cdot \text{ताज}}{\text{ज}} \\
 &= \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} + \int \text{च} \cdot \text{ता} \left(\frac{१}{\text{ज}} \right)
 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{\text{च}}{\text{ज}} - \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} = \int \text{च} \cdot \text{ता} \left(\frac{१}{\text{ज}} \right)$ यह भी एक दूसरे प्रकार का खण्ड-

चलानयन है। इसको $\int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} = \frac{\text{च}}{\text{ज}} + \int \frac{\text{च} \cdot \text{ताज}}{\text{ज}}$ ऐसे भी लिख सकते हो।

१२। स्वतन्त्रराशि का चाहे जैसा फल हो परन्तु चलनकलन से उसका तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हो परन्तु यदि तात्कालिक सम्बन्ध ज्ञात हो तो चलराशिकलन से साक्षात् उसी तात्कालिक सम्बन्ध से प्रायः फल का ज्ञान नहीं होता जैसे $\frac{१}{\sqrt{\text{य}^२ \pm २\text{अय}}}$ इस तात्कालिक सम्बन्ध में जब तक एक

दूसरा स्वतन्त्रराशि $r = y \pm a$ ऐसा न मानोगे तब तक चलसंख्या का जानना कठिन है। एक स्वतन्त्रराशि के स्थान में क्या जोड़ घटा वा किससे गुण भाग कर दूसरी स्वतन्त्रराशि कल्पना करें जिसमें तात्कालिक सम्बन्ध वा तात्कालिकी गति पर से सहज में चलसंख्या सिद्ध हो जाय इस के लिये अनेक उदाहरणों के क्रियाओं का जानना और अभ्यास करना इनको छोड़ और कोई उपाय नहीं है। इस लिये विद्यार्थियों को अभ्यास करने के लिये हम यहाँ पर कुछ उदाहरणों को क्रिया समेत दिखाते हैं ॥

उदाहरणों के करने के पहले खण्डचलायन की क्रिया समझने के लिये नीचे लिखे हुए श्लोक वा दोहे को अभ्यास कर रक्खो।

श्लोक ।

इष्टाप्तभुक्तिं परिकल्प्य भुक्तिं

तज्जं चलं चैकमथाहतिर्या ।

एकेष्टयोरिष्टजवाहतैक—

गतेश्चलोना स्वगतेश्चलः स्यात् ॥ १२ ॥

दोहा

इष्टभक्त गति मानि गति जो चल सो है एक ।

एक इष्ट को घात करि राखहु धारि विवेक ॥

इष्टभुक्ति हत एक को मानि भुक्तिः चल लाय ।

तामें याको हीन करि गतिचल कहो वनाय ॥ १२ ॥

उदाहरण ।

$$(१) \int y \sqrt{y+a} \text{ ताय} = \int (y+a-a) \sqrt{y+a} \text{ ताय}$$

$$= \int (y+a) (y+a)^{\frac{1}{2}} \text{ ताय} - \int a \sqrt{y+a} \text{ ताय}$$

$$= \int (y+a)^{\frac{3}{2}} \text{ ताय} - a \int \text{ ताय} (y+a)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{5} (y+a)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} a (y+a)^{\frac{3}{2}} ।$$

$$२) \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{y+a} + \sqrt{y+k}} = \int \frac{\text{ताय} \sqrt{y+a} - \text{ताय} \sqrt{y+k}}{a-k}$$

$$= \frac{२}{३} \left\{ \frac{(y+a)^{\frac{3}{2}} - (y+k)^{\frac{3}{2}}}{a-k} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{दोनों उदाहरणों में } r = y+a \\ \text{कल्पना करने से भी चलराशिसिद्ध हुए हैं} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (३) \int \frac{य \cdot ताय}{य^२ - अ^२} &= \frac{१}{२अ} \int \left(\frac{यताय}{य^२ - अ^२} - \frac{यताय}{य + अ} \right) \\
 &= \frac{१}{२अ} \int \left\{ \frac{१}{४अ} \left(\frac{२ताय \cdot य}{य^२ - अ^२} - \frac{२तायय}{य + अ} \right) - \frac{यताय}{य + अ} \right\} \\
 &= \frac{१}{४अ} \int \frac{य^२ - अ^२}{य + अ} - \frac{१}{२अ} \int \frac{य \cdot ताय}{य + अ} \\
 &= \frac{१}{४अ} \int \frac{य^२ - अ^२}{य + अ} - \frac{१}{४अ} \int \frac{२यताय}{य + अ} \\
 &= \frac{१}{४अ} \int \frac{य^२ - अ^२}{य + अ} - \frac{१}{४अ} \int \frac{२य \cdot ताय}{य + अ},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (४) \int (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} य^m \cdot ताय &= \int य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} य^{m-n} \cdot ताय \\
 &= \int य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} (य^n)^{\frac{म}{न}-1} \cdot ताय \\
 &= \int क^{\frac{म}{न}-1} क^{\frac{म}{न}} य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} (य^n)^{\frac{म}{न}-1} \cdot ताय \\
 &= क^{\frac{म}{न}-1} \int य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} क^{\frac{म}{न}-1} (य^n)^{\frac{म}{न}-1} \cdot ताय \\
 &= क^{\frac{म}{न}-1} \int य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} (कय^n)^{\frac{म}{न}-1} \cdot ताय \\
 &= क^{\frac{म}{न}-1} \int य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} (अ + कय^n - अ)^{\frac{म}{न}-1} \cdot ताय । अब यहां
 \end{aligned}$$

मानो कि $र = अ + कय^n$, \therefore तार $= न \cdot कय^{n-1} \cdot ताय$ और

$$ताय = \frac{तार}{नक \cdot य^{n-1}}$$

$$इस लिये क^{\frac{म}{न}-1} \int य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} (अ + कय^n - अ)^{\frac{म}{न}-1} \cdot ताय$$

$$= क^{\frac{म}{न}-1} \int य^{n-1} (अ + कय^n)^{\frac{म}{न}} (अ + कय^n - अ)^{\frac{म}{न}-1} \frac{तार}{नकय^{n-1}}$$

$$= \frac{क^{\frac{म}{न}-1}}{नक} \int र^{\frac{म}{न}} (र-अ)^{\frac{म}{न}-1} तार । अब यहां यदि \frac{म}{न} यह अभिन्न$$

और धन हो तो द्वियुक्पदसिद्धान्त से $(र-अ)^{\frac{म}{न}-1}$ इस का मान

फैला कर उसे $र^{\frac{म}{न}}$ तार इस से गुण फिर सहज में चलराशि जान सकते हो

जैसे $\int y^{\frac{1}{2}} \sqrt{ax+y}$ ताय यहां $n = \frac{1}{2}, \frac{p}{q} = \frac{1}{2}, k = 1$, और $m - 1 = 2$

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$, और $r = a + y$, तब

$$\begin{aligned} \frac{k^{\frac{m}{n}}}{n k} \int r^{\frac{p}{q}} (r-a)^{\frac{m}{n}-1} \text{ तार} &= \frac{1^{-2}}{2 \times 1} \int r^{\frac{1}{2}} (r-a)^2 \text{ तार} \\ &= \int r^{\frac{1}{2}} (r^2 - 2ra + a^2) \text{ तार} = \int r^{\frac{5}{2}} \text{ तार} - 2a \int r^{\frac{3}{2}} \text{ तार} + a^2 \int r^{\frac{1}{2}} \text{ तार} \\ &= \frac{2}{6} r^{\frac{6}{2}} - \frac{4}{5} a r^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} a^2 r^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{6} (a+y)^{\frac{6}{2}} - \frac{4}{5} a (a+y)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} a^2 (a+y)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

और $\int y^{\frac{2}{3}} (a+ky)^{\frac{3}{2}}$ ताय । यहां $n = 2, m - 1 = 3, \frac{p}{q} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{m}{n} = 2, r = a + ky$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये, } \frac{k^{\frac{m}{n}}}{n k} \int r^{\frac{p}{q}} (r-a)^{\frac{m}{n}-1} \text{ तार} &= \frac{1}{2k} \int r^{\frac{2}{3}} (r-a)^3 \text{ तार} \\ &= \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{4} r^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2} a r^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{4k} (a+ky)^{\frac{4}{3}} - \frac{3a}{2k} (a+ky)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

अथवा, $\int (a+ky)^{\frac{p}{q}} y^{m-1} \times \text{ताय}$

$$= \int (ay^{-n} + k)^{\frac{p}{q}} y^{\frac{np}{q} + m - 1} \times \text{ताय}$$

$$= \int y^{-n-1} (ay^{-n} + k)^{\frac{p}{q}} y^{\frac{np}{q} + m + n} \times \text{ताय}$$

$$= \int a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1} \times y^{-n-1} (ay^{-n} + k)^{\frac{p}{q}} (ay^{-n} + k - k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1\right)} \times \text{ताय}$$

यहां भी यदि $r = ay^{-n} + k$ तो तार = $-ay^{-n-1} \times \text{ताय}$

$$\therefore \text{ताय} = -\frac{\text{तार}}{an y^{-n-1}}$$

इस लिये

$$\int a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1} \times y^{-n-1} (ay^{-n} + k - k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1\right)} \times \text{ताय} (ay^{-n} + k)^{\frac{p}{q}}$$

$$= -\frac{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} + 1}{an} \int r^{\frac{p}{q}} (r-k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1\right)} \times \text{तार} । \text{यहाँ यदि}$$

$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ यह ऋणात्मक अभिन्न संख्या हो तो द्वियुक्पद से चलराशि जान सकते हो

$$\text{जैसे } \int \frac{\text{ताय}}{y^2 \sqrt{a+y^2}} = \int y^{-2} (a+y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ताय}$$

$$\text{यहाँ } m-1 = -2 \text{ } \therefore m = -1, n=2, \text{ और } \frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \text{ और } k=1,$$

$$\text{इस लिये } -\frac{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} + 1}{an} \int r^{\frac{p}{q}} (r-k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1\right)} \times \text{तार}$$

$$= -\frac{a^0}{2a} \int r^{-\frac{1}{2}} (r-k)^0 \times \text{तार} = -\frac{1}{2a} \int r^{-\frac{1}{2}} \text{तार}$$

$$= \frac{1}{a} r^{\frac{1}{2}} \text{ यहाँ } r = ay^{-2} + 1,$$

$$\text{और } \int \frac{\text{ताय}}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int y^0 (a^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ताय}$$

$$\text{यहाँ } m-1 = 0 \text{ } \therefore m = 1, \frac{p}{q} = -\frac{3}{2}$$

$$n=2, \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \text{ और } a^2 = a, r = (a^2 y^{-2} + 1)$$

$$\text{इस लिये } -\frac{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} + 1}{an} \int r^{\frac{p}{q}} (r-k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1\right)} \times \text{तार}$$

$$= -\frac{1}{2a^2} \int r^{-\frac{3}{2}} (r-k)^0 \text{ तार}$$

$$= -\frac{1}{2a^2} \int r^{-\frac{3}{2}} \text{तार} = -\frac{1}{2a^2} \times -\frac{2}{1} r^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{r}}$$

$$= \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 y^{-2} + 1}} = \frac{y}{a^2 \sqrt{a^2 + y^2}} ।$$

$$\begin{aligned}
 (५) \int \frac{य^म ताय}{(अ + कय)^न} &= \frac{१}{क^म} \int \frac{(अ + कय - अ)^म}{(अ + कय)^न} ताय \\
 &= \frac{१}{क^म} \int \frac{(र-अ)^म तार}{र^n} क, \text{ यदि } र = अ + कय, \\
 &= \frac{१}{क^{म+१}} \int \frac{र^म - मअ \cdot र^{म-१} + अ^२ \cdot \frac{म(म-१)}{२} र^{म-२} \dots}{र^n} \cdot तार \\
 &= \frac{१}{क^{म+१}} \int (र^{म-न} - मअ र^{म-न-१} + अ^२ \cdot \frac{म(म-१)}{२} र^{म-न-२} \dots) तार \\
 &= \frac{१}{क^{म+१}} \left\{ \frac{र^{म-न+१}}{म-न+१} - \frac{मअ}{म-न} र^{म-न} + अ^२ \cdot \frac{म(म-१)}{२} \cdot \frac{र^{म-न-१}}{म-न-१} \dots \right\} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (६) \int \frac{ताय}{अ + कय + गय^२} &= \int \frac{४ग \cdot ताय}{४अग + ४कगय + ४ग^२य^२} \\
 &= \int \frac{४गताय}{(२गय + क)^२ + ४अग - क^२} \\
 &= \int \frac{४गताय}{र^२ + ४अग - क^२} = \int \frac{२तार}{र^२ + ४अग - क^२} \text{ (यदि } २गय + क = र) \\
 &= \frac{२}{\sqrt{४अग - क^२}} \operatorname{स्प}^{-१} \frac{र}{\sqrt{४अग - क^२}}
 \end{aligned}$$

यदि $४अग > क^२$ और अ, क, ग सब धन हों

$$\begin{aligned}
 \text{वा, } \int \frac{२तार}{र^२ + ४अग - क^२} &= २ \int \frac{१}{२ख} \left(\frac{तार}{र-ख} - \frac{तार}{र+ख} \right) \\
 &= \frac{१}{ख} \operatorname{ला} \frac{र-ख}{र+ख}
 \end{aligned}$$

(यदि $ख = \sqrt{क^२ - ४अग}$ और $४अग < क^२$)

$$\therefore \frac{१}{ख} \operatorname{ला} \frac{र-ख}{र+ख} = \frac{१}{\sqrt{क^२ - ४अग}} \operatorname{ला} \frac{२गय + क - \sqrt{क^२ - ४अग}}{२गय + क + \sqrt{क^२ - ४अग}}$$

$$(७) \int \frac{ताय}{(य + अ)(य + क)} = \int \frac{१}{अ-क} \left(\frac{ताय}{य + क} - \frac{ताय}{य + अ} \right)$$

$$= \frac{१}{अ-क} \int \left(\frac{ताय}{य + क} - \frac{ताय}{य + अ} \right) = \frac{१}{अ-क} \operatorname{ला} \frac{य + क}{य + अ} ।$$

$$(८) \frac{(त + नय)ताय}{अ + कय + गय^२} = \frac{१}{२ग} \int \frac{\{ २तग + न(क + २गय - क) \} ताय}{अ + कय + गय^२}$$

$$= \frac{१}{२ग} \left\{ \int \frac{न(क + २गय)ताय}{अ + कय + गय} + \int \frac{(२तग - नक)ताय}{अ + कय + गय} \right\}$$

$$= \frac{न}{२ग} ला (अ + कय + गय) + \left(\frac{२तग - नक}{२ग} \right) \int \frac{ताय}{अ + कय + गय}$$

दूसरे खण्ड का चल द्वै उदाहरण से स्पष्ट है ।

$$(९) \int \frac{(अ + कय)ताय}{य - २अ,य + अ, + क,} = \int \frac{(अ + कअ, + क(य - अ,))ताय}{य - २अ,य + अ, + क,}$$

$$= \int \frac{(अ + कअ,)ताय}{(य - अ,) + क,} + \int \frac{क(य - अ,)ताय}{(य - अ,) + क,}$$

$$= \frac{अ + कअ,}{क,} स्प^{-१} \frac{य - अ,}{क,} + \frac{क}{२} ला \{ (य - अ,) + क, \}$$

(१०) ९ वें उदाहरण में यदि, अ = १, -क = अ, = कोज्याइ, और क, = ज्याइ

$$\text{तो } \int \frac{(१ - कोज्याइ - य)ताय}{१ - २कोज्याइ \times य + य^२} = \frac{१ - कोज्याइ}{ज्याइ} स्प^{-१} \frac{य - कोज्याइ}{ज्याइ}$$

$$= \frac{कोज्याइ}{२} ला \{ (य - कोज्याइ)^२ + ज्याइ \}$$

$$= ज्याइ स्प^{-१} \frac{य - कोज्याइ}{ज्याइ} - \frac{कोज्याइ}{२} ला (य - २कोज्याइ \times य + १)।$$

$$(११) \int \frac{(अ^२ \pm य^२)^{\frac{१}{२}} ताय}{य^२} = \int \left(\frac{अ ताय}{य \sqrt{अ^२ \pm य^२}} \pm \frac{य ताय}{य \sqrt{अ^२ \pm य^२}} \right)$$

$$\int \pm ताय (अ^२ \pm य^२)^{-\frac{१}{२}} + \int अ^२ य^{-२} (अ^२ \pm य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\sqrt{अ^२ \pm य^२} + ला (य + \sqrt{अ^२ \pm य^२}) \text{ यदि धन चिह्न हो ।}$$

$$= -\sqrt{अ^२ \pm य^२} - ज्या^{-१} \frac{य}{अ} \text{ यदि ऋण हो ।}$$

$$(१२) \int \frac{अ^२ ताय}{य \sqrt{य^२ \pm अ}} = \int अ^२ य^{-२} (\pm अ^२ य^{-२} + १)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= \int (अ^२ य^{-२} + १ - १)(अ^२ य^{-२} + १)^{-\frac{१}{२}} ताय, + चिन्ह से$$

$$= \int (अ^२ य^{-२} + १)^{\frac{१}{२}} ताय - \int \frac{ताय}{\sqrt{अ^२ य^{-२} + १}} \text{ अब यहां } (अ^२ य^{-२} + १)^{\frac{१}{२}}$$

और $\frac{१}{(अ^२ य^{-२} + १)^{\frac{१}{२}}}$ का मान द्वियुक्पदसिद्धान्त से ले आकर एक श्रेणी

में चलराशि का मान जान सकते हो इसी प्रकार—चिन्ह से भी जान लो

$$(१३) \int \frac{\text{ताय}}{y \sqrt{a^2 y^2 + 1}} = \int \frac{\text{ताय} \cdot y^{-2}}{y \sqrt{a^2 + y^{-2}}} = \int \frac{\text{ताय} \cdot y^{-3}}{\sqrt{a^2 + y^{-2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int -2 \text{ताय} y^{-3} (a^2 + y^{-2})^{-\frac{1}{2}} = -(a^2 + y^{-2})^{\frac{1}{2}} ।$$

$$(१४) \int \frac{\text{ताय}}{a + ककोज्याय} = \int \frac{\text{ताय}}{a(\text{ज्या}\frac{y}{2} + कोज्या\frac{y}{2}) + क(कोज्या\frac{y}{2} - ज्या\frac{y}{2})}$$

$$= \int \frac{\text{ताय}}{(a + क)कोज्या\frac{y}{2} + (a - क)ज्या\frac{y}{2}} = \int \frac{\text{ताय छे}\frac{y}{2}}{a + क + (a - क)\text{स्प}\frac{y}{2}}$$

$$= २ \int \frac{\text{ताल}}{a + क + (a - क)\text{ल}}, \text{ यदि ल} = \text{स्प}\frac{y}{2}$$

इस लिये यदि $a > क$ तो

$$२ \int \frac{\text{ताल}}{a + क + (a - क)\text{ल}} = \frac{२}{a - क} \int \frac{\text{ताल}}{\frac{a + क}{a - क} + \text{ल}} = \frac{२}{a - क} \int \frac{\text{ताल}}{ग^2 + ल^2}$$

यदि $ग^2 = \frac{a + क}{a - क}$ तो ११ सूत्र से

$$\frac{२}{a - क} \int \frac{\text{ताल}}{ग^2 + ल^2} = \frac{२}{a - क} \cdot \frac{१}{ग} \text{स्प}\frac{ल}{ग} = \frac{२}{a - क} \cdot \frac{\sqrt{a - क}}{\sqrt{a + क}} \text{स्प}\frac{ल}{ग}$$

$$= \frac{२}{\sqrt{a^2 - क^2}} \text{स्प}^{-१} \left(\sqrt{\frac{a - क}{a + क}} \text{स्प}\frac{१}{२} y \right)$$

और यदि $a < क$ तो

$$२ \int \frac{\text{ताल}}{a + क + (a - क)\text{ल}} = २ \int \frac{\text{ताल}}{a + क - (क - अ)\text{ल}} = \frac{२}{क - अ} \int \frac{\text{ताल}}{\frac{a + क}{क - अ} - \text{ल}}$$

$$= \frac{२}{क - अ} \int \frac{\text{ताल}}{ग^2 - ल^2}, \text{ यदि } \frac{a + क}{क - अ} = ग^2$$

$$= \frac{२}{क - अ} \int \frac{१}{२ग} \left(\frac{\text{ताल}}{ग - ल} + \frac{\text{ताल}}{ग + ल} \right) = \frac{१}{ग(क - अ)} \left(\int \frac{\text{ताल}}{ग - ल} + \int \frac{\text{ताल}}{ग + ल} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{g(k-a)} \left(- \int \frac{-ताल}{g-l} + \int \frac{ताल}{g+l} \right) \\
&= \frac{1}{g(k-a)} \left[ला(g+l) - ला(g-l) \right] \\
&= \frac{1}{g(k-a)} ला \frac{g+l}{g-l} = \frac{1}{k-a} ला \frac{\sqrt{a+k} + \sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2}}{\sqrt{a+k} - \sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2}}
\end{aligned}$$

यदि $\sqrt{a+k} - \sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2}$ यह क्रणात्मक हो तो

$$\int \frac{ताय}{a+k \cdot ज्याय} = \frac{1}{\sqrt{k-a}} ला \frac{\sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2} + \sqrt{a+k}}{\sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2} - \sqrt{a+k}}$$

यदि यहां $\int \frac{ताय}{g+k \cdot ज्याय}$ यह जानना हो तो

$$y = \frac{\pi}{2} + ल \text{ कल्पना करने से } \int \frac{ताय}{a+k \cdot ज्याय} = \int \frac{ताल}{a+k \cdot ज्याल} \text{ यह}$$

ठीक १४ वें उदाहरण के ऐसा हो गया ।

१५। जैसे ज्याय = r तो ज्या⁻¹r = y अर्थात् ज्या से जिसका बोध होता है उस से उलटा ज्या⁻¹ से बोध होता है। इसी प्रकार कल्पना करो कि फ से जो बोध होता है उस से उलटा फ⁻¹ से तब फ { फ⁻¹(y) } = y ऐसा होगा अर्थात् फ⁻¹ से यदि ज्या⁻¹ यहण करो तो इसे ऐसे बोलेंगे कि य का जो क्रमज्या खण्ड पर से चाप हो उस की क्रमज्या य के बराबर है।

इस पर से यदि $\int f(y)$ ताय इस का ज्ञान हो तो

$\int f^{-1}(y)$ ताय इसका भी ज्ञान हो सकता है जैसे

यदि $f^{-1}(y) = ल$ तो $y = फ(ल)$ तब

$f^{-1}(y)$ ताय = $\int ल \frac{ताय}{ताल} = यल - \int यताल = य ल \int फ(ल)ताल$ । ऊपर जो उदाहरण दिखाये गये हैं उनके बल से हज़ारहों चलानयन कर सकते हो और

जब अनन्त चल का मान आ गया तब उस में स्थिराङ्कों का उत्थापन देने से सान्तचलानयन भी सहज में कर सकते हो ।

जैसे खण्ड चलानयन से

$$\begin{aligned} \int \text{ज्या}^n \text{यताय} &= - \int \frac{\text{ताकोज्याय}}{\text{ताय}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} \\ &= -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int \text{कोज्या}^2 \text{यज्या}^{n-2} \text{यताय} \\ &= -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int (1-\text{ज्या}^2) \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} \\ &= -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} \end{aligned}$$

—(n-1) ∫ ज्याⁿयताय सम शोधन से

$$n \int \text{ज्या}^n \text{यताय} = -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{ज्या}^n \text{यताय} = - \frac{\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय}$$

यहां पर यदि n एक से अधिक और धन हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में ० और $\frac{\pi}{2}$ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय} = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} ।$$

इसी प्रकार यदि n धन और ३ से अधिक हो तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} = \frac{n-3}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-4} \text{यताय} ।$$

इसी प्रकार यदि n धन और सम हो तो लगातार यही विधि करने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ताय} = \frac{\pi}{2} \text{ और यदि धन न विषम हो तो अन्त में}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्यायताय} = 1 \text{ यह होगा । इस लिये}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 1}{n(n-2)(n-4)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{यदि } n \text{ सम}) ।$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 2}{n(n-2)(n-4)\dots 3} \quad (\text{यदि } n \text{ विषम}) ।$$

यहाँ कल्पना करो कि n धन और सम है तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (१)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-5} \dots \frac{2}{3} \dots \quad (२)$$

अब यहाँ स्पष्ट है कि (२) प्रक्रम से श्रेणी में यदि मान ले आओ तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} \text{ यह } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय} \text{ इस से छोटा और}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय} \text{ इस से बड़ा है क्योंकि ऊपर के मान नीचे के मान से}$$

उत्तरोत्तर छोटे हैं । परन्तु पूर्व सिद्ध है कि

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय}} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय}} \text{ यह १ से}$$

छोटा और $\frac{n-1}{n}$ से बड़ा है । इस लिये (१) और (२) के दहिने पक्ष का

संबन्ध १ से न्यून और $\frac{n-1}{n}$ से बड़ा हुआ । इस प्रकार से

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (n-2)(n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-3)(n-1)} \text{ और}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2.2 \ 2.4 \ 2.6, 6 \dots (n-3) (n-2) \ n}{1.3 \ 3.5 \ 5.7 \dots (n-2) (n-1) \ n-2} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

रूप व्यासार्द्ध की परिधि जानने के लिये इसे वालिस का सूत्र Wallis's Formula कहते हैं। इस प्रकार से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त नये उत्पन्न हो सकते हैं।

अभ्यास के लिये और उदाहरण

$$१। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-\text{कय}-\text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{क} + २\text{य}}{\sqrt{\text{४} + \text{क}}}$$

$$२। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-\text{कय}-\text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{५} + २\text{य}}{\sqrt{२९}}$$

$$३। \int \text{क} \cdot \text{य}^{\text{न}} \cdot \text{लायताय} = \frac{\text{क}}{\text{न}+१} \cdot \text{य}^{\text{न}+१} \left(\text{लाय} - \frac{१}{\text{न}+१} \right)$$

$$४। \int २ \text{य}^३ \text{लायताय} = \frac{२}{३} \text{य}^३ \left(\text{लाय} - \frac{१}{३} \right)$$

$$५। \int \text{यलायताय} = \frac{१}{२} \text{य}^२ \left(\text{लाय} - \frac{१}{२} \right)$$

$$६। \int \text{लायताय} = \text{य} \left(\text{लाय} - १ \right)$$

$$७। \int \text{अय} \sqrt{\text{य}+१} = \frac{२\text{अ}}{५} (\text{य}+१)^{\frac{५}{२}} - \frac{२\text{अ}}{३} (\text{य}+१)^{\frac{३}{२}}$$

$$८। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}+२} - \sqrt{\text{य}+१}} = \frac{२}{३} \left\{ (\text{य}+२)^{\frac{३}{२}} + (\text{य}+१)^{\frac{३}{२}} \right\}$$

$$९। \int \text{य}^३ (३ + \text{य}^२ \sqrt{३})^{\frac{३}{२}}$$

$$= \frac{१}{१६} (३ + \text{य}^२ \sqrt{३})^{\frac{५}{२}} - \frac{३}{१०} (३ + \text{य}^२ \sqrt{३})^{\frac{३}{२}}$$

$$१०। \int (\text{अ} + \text{कय})^२ \text{य}^५ \text{ताय},$$

$$= \frac{१}{\text{क}^५} \left(\frac{\text{र}^७}{७} - \frac{२}{३} \text{अर}^६ + \frac{६}{५} \text{अ}^२ \text{र}^५ - \text{अ}^३ \text{र}^४ + \frac{\text{अ}^४}{३} \text{र}^३ \right) \text{ यदि } \text{र} = \text{अ} + \text{कय}$$

$$११। \int \frac{\text{य}^५ \text{ताय}}{(१ + २\text{य})^५}$$

$$= \frac{1}{68} \left[\frac{r}{2} - \frac{1}{1} r + 10 \text{ला} r + \frac{10}{r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{3r} \right]$$

यदि $r = 1 + 2y$ ।

$$१२। \int \frac{\text{ताय}}{1 + 2y + 3y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{स्प}^{-1} \frac{3y + 1}{\sqrt{2}}$$

$$१३। \int \frac{\text{ताय}}{y^2 + 4y + 5} = \frac{1}{3} \text{ला} \left[\frac{y + 1}{y + 2} \right]$$

$$१४। \int \frac{\text{ताय}}{(y + 2)(y + 1)} = \text{ला} \frac{y + 2}{y + 1}$$

$$१५। \int \frac{(1 + 2y) \text{ताय}}{1 + 2y + 3y^2} \\ = \frac{1}{3} \left\{ \text{ला} (1 + 2y + 3y^2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{स्प}^{-1} \frac{3y + 1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$१६। \int \frac{(1 + 2y) \text{ताय}}{y^2 + 4y + 5} = \text{ला} (y + 2) - \frac{1}{3} \text{ला} \left[\frac{y + 1}{y + 2} \right]$$

$$१७। \int \frac{(1 + 2y) \text{ताय}}{(y - a)^2 + k^2} \\ = \frac{1 + 2a}{k} \text{स्प}^{-1} \frac{y - a}{k} + \text{ला} \left\{ (y - a) + k^2 \right\}$$

$$१८। \int \frac{(1 + 2y) \text{ताय}}{y^2 - 4y + 4} = \frac{1}{2} \text{स्प}^{-1} \frac{y - 2}{2} + \text{ला} \left\{ (y - 2)^2 + 4 \right\}$$

$$१९। \int \frac{\text{रताय}}{r - y \text{कोज्याइ} + y^2} \\ = \text{ज्याइ} \text{स्प}^{-1} \frac{y - \text{कोज्याइ}}{\text{ज्याइ}} - \frac{\text{कोज्याइ}}{2} \text{ला} \left\{ (y - 1)^2 + 4 \text{यज्याइ} \frac{1}{2} \right\}$$

यदि $r = 1 - y \cdot \text{कोज्याइ}$ ।

$$२०। \int \frac{\text{ताय} \sqrt{1 + y^2}}{y^2} = \frac{\text{ला} (y + \sqrt{1 + y^2})^y - \sqrt{1 + y^2}}{y}$$

$$२१। \int \frac{\text{ताय} \sqrt{1 - y^2}}{y^2} = - \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} - \text{ज्या}^{-1} y$$

$$२२। \text{सिद्ध करो कि} \int \frac{a \cdot \text{ताय}}{y \sqrt{y^2 - a^2}} = - \text{ज्या}^{-1} \frac{a}{y}$$

$$\text{वा } \int \frac{\text{अ}\cdot\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2-\text{अ}^2}} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{अ}}{\text{य}}$$

$$२३। \text{ सिद्ध करो कि } \int \frac{\text{अ}\cdot\text{ताय}}{\text{य}\sqrt{\text{य}^2+\text{अ}^2}} = \text{ला} \frac{\text{य}}{\text{अ}+\sqrt{\text{य}^2+\text{अ}^2}}$$

$$२४। \text{ सिद्ध करो कि } \int \frac{\text{अ}\cdot\text{ताय}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}^2-\text{य}^2}} = \text{ला} \frac{\text{य}}{\text{अ}+\sqrt{\text{अ}^2-\text{य}^2}}$$

$$२५। \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^3\sqrt{\text{य}^2+१}} = - (१ + \text{य}^{-२})^{\frac{१}{२}}$$

$$२६। \int \frac{\text{ताय}}{२+\text{कोज्याय}} = \frac{२}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{१}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{\frac{१}{२}\text{य}} \right]$$

$$२७। \int \frac{\text{ताय}}{१+२\text{कोज्याय}} = \frac{१}{\sqrt{३}} \text{ला} \frac{\text{स्प}^{\frac{१}{२}\text{य}} + \sqrt{३}}{\text{स्प}^{\frac{१}{२}\text{य}} - \sqrt{३}}$$

$$२८। \text{पज्याप}\cdot\text{कोज्यापताप} = \frac{\text{ज्या२ष}}{८} = \frac{\text{पकोज्या२प}}{४}$$

$$२९। \int \frac{\text{इ}^{\text{कय}}\text{ताय}}{\text{इ}^{\text{कय}}+१} = \frac{१}{\text{क}} \text{स्प}^{-१} (\text{इ}^{\text{कय}})$$

$$३०। \int \frac{\sqrt{\text{य}+\text{क}}}{\sqrt{\text{य}}} \text{ताय} = \sqrt{\text{य}^2+\text{कय}} + \text{क}\cdot\text{ला}(\sqrt{\text{य}+\text{क}} + \sqrt{\text{य}})$$

$$३१। \int \text{ज्या}^{\frac{१}{३}} \text{यताय} = \frac{३य}{८} + \frac{\text{ज्या२य}}{१६} - \frac{\text{ज्या}\cdot\text{य}}{२}$$

$$३२। \int \text{प}\cdot\text{स्पष छें षताप} = \frac{\text{छेंप}}{२} - \frac{१}{३} \text{स्पप}$$

३३। खण्डचलानयन से सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}(\text{ककोज्याअय} + \text{अज्याअय})}{\text{अ}^2 + \text{क}^2}$$

३४। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} & \int \text{इ}^{\text{अय}}\text{ज्यामय कोज्यानयताय} \\ &= \frac{\text{इ}^{\text{अय}} \{ \text{अज्या} (\text{म} + \text{न}) \text{य} - (\text{म} + \text{न}) \text{कोज्या} (\text{म} + \text{न}) \text{य} \}}{२ \{ \text{अ}^2 + (\text{म} + \text{न})^2 \}} \\ &+ \frac{\text{इ}^{\text{अय}} \{ \text{अज्या} (\text{म} - \text{न}) \text{य} - (\text{म} - \text{न}) \text{कोज्या} (\text{म} - \text{न}) \text{य} \}}{२ \{ \text{अ}^2 + (\text{म} - \text{न})^2 \}} \end{aligned}$$

$$३५। \int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्यायकोज्याय}} = \text{ला (स्पय)}$$

$$३६। \int \frac{\text{ताय}}{२ज्याय} = \text{ला} \left(\text{स्प} \frac{य}{२} \right)^{\frac{१}{२}}, \text{ और } \int \frac{\text{ताय}}{२कोज्याय} \\ = \text{ला} \left\{ \text{कोस्प} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{य}{२} \right) \right\}^{\frac{१}{२}} = \text{ला} \left\{ \text{स्प} \left(\frac{\pi}{२} + \frac{य}{२} \right) \right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$३७। \int \frac{\text{कयताय}}{(\text{अ-य})^२} = \frac{\text{अक}}{२(\text{अ-य})} - \frac{\text{क}}{\text{अ-य}}$$

$$३८। \int \frac{२ + \text{कोज्याय}}{२य + ज्याय} \text{ताय} = \text{ला} (२य + ज्याय)$$

$$३९। \int \frac{\text{ताय}(\text{लाय})^{\text{म}}}{य} = \frac{(\text{लाय})^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}$$

$$४०। \frac{२ताय}{\text{कोज्याय} + ज्याय} = \sqrt{२} \text{ला} \left\{ \text{स्प} \left(\frac{\pi}{८} + \frac{य}{२} \right) \right\}$$

$$४१। \int \frac{२य + २ज्याय}{१ + \text{कोज्याय}} \text{ताय} = २य \text{स्प} \frac{य}{३}$$

$$४२। \int \frac{\text{ग} \cdot \text{ज्या} \cdot \text{यताय}}{\text{अ} + \text{ग} \cdot \text{कोज्या} \cdot \text{य}} = \frac{\text{ग}}{\text{क}} \left[\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{अ}} \right]^{\frac{१}{२}} \text{स्प} \frac{\text{स्पय} \sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{अ} + \text{क}}} - \frac{\text{गय}}{\text{क}}$$

$$४३। \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{क} \cdot \text{ज्याय} + \text{ग} \cdot \text{कोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{ग} \left(\frac{\pi}{३} \cdot \text{ज्याय} + \text{कोज्याय} \right)} \\ = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \frac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}} \cdot \text{कोज्या}(\text{य-इ})} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{अ} + \frac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}} \cdot \text{कोज्याल}}$$

$$\text{यदि } \frac{\text{क}}{\text{ग}} = \text{स्पइ}, \text{ य-इ} = \text{ल}$$

अब १४वें उदाहरण से सिद्ध कर लो ।

$$४४। \int \frac{\text{अ} \cdot \text{यताय}}{\sqrt{२अय-य}} = \text{अ}^{\frac{१}{२}} \text{उज्या}^{-१} \frac{य}{\text{अ}} - \text{अ} \sqrt{२अय-य}$$

$$४५। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{य^२-८य+२}} = \text{ला} \left\{ \text{य-४} + \sqrt{य^२-८य+२} \right\}$$

$$४६। \int \text{ताषस्प}^{\text{न}} = \frac{य^{२न-१}}{२न-१} - \frac{य^{२न-३}}{२न-३} + \frac{य^{२न-५}}{२न-५} - \frac{य^{२न-७}}{२न-७}$$

+ - (- १)ⁿय + (- १)ⁿय यदि य = स्पय

$$४७। \int \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^n \text{ताय} = य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^n - नय \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^{n-१}$$

$$+ न(न-१)य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^{n-२} - न(न-१)(न-२)य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^{n-३} + \dots$$

$$४८। \int \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^४ \text{ताय} = य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^४ - ४य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^३$$

$$+ १२य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^२ - २४य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\} + २४य$$

$$४९। \int \frac{\text{क} \cdot \text{उज्या}^{-\frac{य}{अ}}}{(२अय-य)} \text{ताय} = \frac{\text{क}}{२} \left[\text{उज्या}^{-\frac{य}{अ}} \frac{य}{\text{क}} \right] २$$

$$५०। \int \text{ला} \left\{ \left(\text{लाय} \right)^{\frac{१}{य}} \right\} \text{ताय} = \text{लाय} \left\{ \text{ला} (\text{लाय}) - १ \right\}$$

५१। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} \pi \text{अपज्यापताप} = \pi \cdot अ$$

$$५२। \int_0^अ \text{ताय} \sqrt{अ-य} = \frac{\pi अ}{४}$$

$$५३। \int_0^इ \frac{\text{ला} (\text{लाय})}{य} \text{ताय} = ०$$

$$५४। \int_0^{\pi} \pi इ^{-य} \text{कोज्या}^१ \text{ताय} = \frac{२}{१५} (१ + इ^{-\pi})$$

$$५५। \int_0^{\pi} \frac{\pi}{४} \text{पस्पप छेपताप} = \frac{\pi}{४} - \frac{१}{३}$$

५६। अकग वृत्तार्द्ध के के केन्द्र पर एक कीट बैठाथा और दूसरा अ विन्दु पर। दूसरा परिधि के राह से और पहला केग व्यासार्ध के राह से ग विन्दु पर आने के लिये चला। दूसरा परिधि में अ विन्दु से जितनी चापात्मक दूरी पर पहुँचता था उसकी कोटिज्या से उस के प्रतिक्षण की गति को गुण देने और व्यासार्द्ध का भाग देने से जो हो उतना प्रतिक्षण पहला चलता था तो बतावो कि जब दूसरा ग विन्दु पर पहुँचा उस समय पहला कहाँ पर पहुँचा।

उ० के ही विन्दु पर लौट कर फिर पहुँचा।

५०। एक लड़के ने एक सीधी १० हाथ की पङ्क्ति में चावलों को बिछा दिया । उन चावलों को खाने के लिये एक जोड़ा कबूतर उतरें । नर एक सिरे से खाने लगा और मादा दूसरे सिरे से । नर उस सिरे से जितना हटता जाता था उससे उसके प्रतिक्षण की गति में भाग देने से जो लब्ध हो उतनी मादे की प्रातिक्षणिकगति है तो बतावो कि उस सिरे से कितनी दूरी पर नर मादा से मिलेगा ।

उ० ७-९३ हाथ

इति प्रथमाध्याय ।

द्वितीयाध्याय

अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन ।

१३ । यदि तात्कालिक सम्बन्ध का रूप

$$\frac{अ + कय + खय^२ + \dots + पय^म}{अ + कय + खय^२ + \dots + पय^न} \text{ ऐसा हो}$$

जहाँ अ, क, अ, क इत्यादि स्थिराङ्क हों और म, न धन और अभिन्न हों ।

यहाँ यदि न से म बड़ा हो तो बीजगणित की साधारण भागविधि से अंश में हर का भाग देकर अभिन्न लब्धि ले आ सकते हो और शेष (जिस में कि सब से बड़ा य का घात न घात से अल्प रहेगा) के नीचे हर का हर लगा दो । इस प्रकार पूर्व भिन्न का रूप अभिन्न और भिन्न दो खण्डों के योग तुल्य जो होगा उस में अभिन्न का चल तो पहले अध्याय के सूत्रों से सहज में जाना जायगा परन्तु भिन्न के चलानयन के लिये पहले इस भिन्न को अनेक भिन्नों के योग के रूप में ले आने का यत्न करते हैं ।

कल्पना करो कि वह भिन्न $\frac{व}{भ}$ है । जहाँ व और भ दोनों य के फल हैं और भ के मान में य का सब से बड़ा घात न है । लाघव के लिये मान लो कि भ में य^न का गुणक १ है ।

कल्पना करो कि

$$भ = (य - अ_१)(य - क_१)^त(य^२ - २अ_२य + अ_२^२ + क_२^२)(य^२ - २अ_२य + अ_२^२ + क_२^२)^थ$$

अब यहाँ यदि भ = ० ऐसा समीकरण हो तो इस में य का

(१) एक मान = अ, सम्भव संख्या ।

(२) त तुल्य सम्भव मान = क_१

(३) दो असम्भव मान = अ_२ ± क_२√-१

(४) थ जोड़े असम्भव मान, हर एक = अ_२ ± क_२√-१

समीकरणों के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि सब खण्डों का घात अवश्य भ के तुल्य होगा जहाँ १ + त + २ + २थ = न । मानो कि

$$\frac{व}{भ} = \frac{आ_१}{य - अ_१} + \frac{का_१}{(य - क_१)^त} + \frac{का_२}{(य - क_१)^{त-१}} + \frac{का_३}{(य - क_१)^{त-२}} + \dots$$

$$+ \frac{का_त}{य - क_१} + \frac{खाय + गा}{य^२ - २अ_२य + अ_२^२ + क_२^२}$$

$$+ \frac{च.य + ज.}{(य - रग.य + ग. + घ.)^4} + \frac{च.य + ज.}{(य - रग.य + ग. + घ.)^{4-}} + \dots$$

$$+ \frac{च.य + ज.}{य - रग.य + ग. + घ.}$$

जहाँ आ, का, खा, गा, च, ज, इत्यादि सब स्थिराङ्क हैं।

यहाँ यदि दहिने पक्ष के सब भिन्नो का समच्छेद विधि से योग करें तो स्पष्ट है कि अंश मान व के तुल्य होगा। अब इस स्वरूप कमीकरण में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से स्थिराङ्कों का मान व्यक्त हो जायगा।

१४। भ के मान में $(य - क.)^n$ इसके अवशिष्ट खण्डों के घान को फा(य) कल्पना करो और व को फ(य) मानो तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य - क.)^n फा(य)} = \frac{फ(य) - \frac{फ(क.)}{फा(क.)} फा(य)}{(य - क.)^n फा(य)} + \frac{\frac{फ(क.)}{फा(क.)}}{(य - क.)^n}$$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $य = क.$ तो

$$फ(य) - \frac{फ(क.)}{फा(क.)} फा(य) = 0$$

इस लिये $(य - क.)$ इससे $फ(य) - \frac{फ(क.)}{फा(क.)} फा(य)$ यह निःशेष होगा।

मानो कि $य - क.$ इस का भाग देने से लब्धि = फि(य) तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य - क.)^n फा(य)} = \frac{फि(य)}{(य - क.)^{n-1} फा(य)} + \frac{फ(क.)}{फा(क.)} \frac{१}{(य - क.)^n}$$

इसी रीति से

$$\frac{फि(य)}{(य - क.)^{n-1} फा(य)} = \frac{फि(य) - \frac{फि(क.)}{फा(क.)} फा(य)}{(य - क.)^{n-2} फा(य)} + \frac{\frac{फि(क.)}{फा(क.)}}{(य - क.)^{n-1}}$$

यहाँ भी यदि $य = क.$ तो $य - क.$ से $फि(य) - \frac{फि(क.)}{फा(क.)} फा(य)$ निःशेष होगा। मानो कि भाग देने से लब्धि = फी(य) तो

$$\frac{फ(य)}{(य - क.)^n फा(य)} = \frac{फी(य)}{(य - क.)^{n-2} फा(य)} + \frac{फ(क.)}{फा(क.)} \frac{१}{(य - क.)^n}$$

$$+ \frac{फि(क.)}{फा(क.) \cdot (य - क.)^{n-1}}$$

यों बार बार क्रिया करने से भी स्पष्ट हो जायगा कि

$$\frac{f(y)}{(y-k_1)^n f_1(y)}$$

इस का मान अनेक खण्ड भिन्नो में ला सकते हैं ।

$$\text{जिनके मान क्रम से } \frac{f(k_1)}{f_1(k_1)} \cdot \frac{1}{(y-k_1)^n}, \frac{f_1(k_1)}{f_1(k_1)} \cdot \frac{1}{(y-k_1)^{n-1}}$$

इत्यादि हैं । यहाँ अत्यन्त स्पष्ट है कि $\frac{f(k_1)}{f_1(k_1)}, \frac{f_1(k_1)}{f_1(k_1)}$ इत्यादि

स्थिराङ्क हैं इस लिये १३वें प्रक्रम में जो आ, का_१, का_२ इत्यादि स्थिराङ्क कल्पना किया है वह ठीक है । इस प्रकार आ, का, का_२ इत्यादि को स्थिराङ्क ठहराना मिस्टर होमरशम काकस (Mr Homersham Cox) ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) में लिखा है । इस प्रकार अकरणीगत भिन्न को खण्ड भिन्नो के रूप में ला सकते हैं ।

इसी तरह यदि $\mu = (y-a_1)(y-k_1)(y-x_1) \dots$ ऐसा हो

जहाँ a_1, k_1, x_1 इत्यादि सब परस्पर भिन्न और सम्भाव्य संख्या हैं

$$\text{तो } \frac{v}{\mu} = \frac{A_1}{y-a_1} + \frac{K_1}{y-k_1} + \frac{X_1}{y-x_1} + \dots \text{ ऐसा कल्पना कर सकते}$$

हो फिर पूर्ववत् सरूप समीकरण से A_1, K_1, X_1 इत्यादि के मान जान सकते हो ।

१५ । लाग्रव से भी A_1, K_1 इत्यादि का मान निकाल सकते हो कल्पना

$$\text{करो कि } \frac{v}{\mu} = \frac{f(y)}{f_1(y)} \text{ और } f_1(y) = (y-a_1)(y-k_1) \dots \text{ तो}$$

$$\frac{f(y)}{f_1(y)} = \frac{A_1}{y-a_1} + \frac{K_1}{y-k_1} + \frac{X_1}{y-x_1} + \dots$$

इस लिये

$$f(y) = A_1 (y-k_1)(y-x_1) \dots$$

$$+ K_1 (y-a_1)(y-x_1) \dots + X_1 (y-a_1)(y-k_1) \dots +$$

इस सरूप समीकरण में चाहे y का मान जो मानो परन्तु समीकरण सत्य ही रहेगा इस लिये मानो कि $y = a_1$ तो

$$f(a_1) = A_1 (a_1-k_1)(a_1-x_1) \dots \quad (१)$$

क्योंकि और खण्ड = ०

$$\text{परन्तु } f_1(y) = (y-a_1)(y-k_1)(y-x_1) \dots$$

$$\text{इस लिये फा}(y) = (y - k_1)(y - x_1) \dots + (y - a_1)(y - m_1) \dots \\ + (y - a_1)(y - k_1) \dots + \dots$$

य के स्थान में a_1 का उत्थापन देने से

$$\text{फा}(a_1) = (a_1 - k_1)(a_1 - x_1) \dots$$

इस लिये (१) समीकरण का रूप

$$\text{फा}(a_1) = \text{आ}_1 \text{फा}(a_1) \therefore \text{आ}_1 = \frac{\text{फा}(a_1)}{\text{फा}(a_1)}$$

$$\text{इसी तरह का}_1 = \frac{\text{फा}(k_1)}{\text{फा}(k_1)} \quad \text{खा}_1 = \frac{\text{फा}(m_1)}{\text{फा}(m_1)}, \text{ इत्यादि ।}$$

(१) उदाहरण $\int \frac{5y^3 - 100y + 141}{y^3 - 5y + 6}$ ताय इस का मान बतावो ।

$$\text{यहाँ } \frac{5y^3 - 100y + 141}{y^3 - 5y + 6} = 5y + 25 + \frac{-5y + 1}{y^3 - 5y + 6}$$

$$= 5y + 25 + \frac{\text{आ}_1}{y-2} + \frac{\text{का}_1}{y-3}$$

समच्छेद करने से, $-5y + 1 = y(\text{आ}_1 + \text{का}_1) - (3\text{आ}_1 + 2\text{का}_1)$

इस लिये सरूप समीकरण से

$$-5 = \text{आ}_1 + \text{का}_1, \quad -1 = 3\text{आ}_1 + 2\text{का}_1$$

$\therefore \text{आ}_1 = 9, \text{ का}_1 = -18$, इस लिये

$$\int \frac{5y^3 - 100y + 141}{y^3 - 5y + 6} \text{ ताय} \\ = \int 5y \text{ ताय} + \int 25 \text{ ताय} + 9 \int \frac{\text{ताय}}{y-2} - 18 \int \frac{\text{ताय}}{y-3}$$

$$= \frac{5}{2}y^2 + 25y + 9\text{ला}(y-2) - 18\text{ला}(y-3)$$

यह तेरहवें प्रक्रम की विधि से आया है ।

१५वें प्रक्रम से निकालना हो तो अभिन्न खण्ड को छोड़ कर

$$\frac{-5y + 1}{y^3 - 5y + 6} = \frac{-5y + 1}{(y-2)(y-3)} = \frac{\text{फा}(y)}{\text{फा}(y)}, \text{ यहाँ } a_1 = 2, k_1 = 3,$$

$\text{फा}(y) = -5y + 1, \text{ फा}(y) = (y-2)(y-3)$ और

$$\text{फा}(y) = 2y - 5 \text{ इस लिये } \text{आ}_1 = \frac{\text{फा}(a_1)}{\text{फा}(a_1)} = \frac{-5 \times 2 + 1}{2 \times 2 - 5} = \frac{-9}{-1} = 9$$

$$\text{और का}_1 = \frac{f(k_1)}{f_1(k_1)} = \frac{-4 \times 3 + 1}{2 \times 3 - 4} = \frac{-11}{2} = -5.5,$$

फिर पूर्ववत् क्रिया करो ।

देखो १५वें प्रक्रम से कैसा लाघव से आ, और का, का मान आया है ।

$$(२) उ०। \int \frac{y^2 + 1}{(y-1)(y+2)(y-3)} \text{ ताय इस का मान जानना है ।}$$

$$\text{यहाँ } a_1 = 1, k_1 = -2, x_1 = 3, f(y) = y^2 + 1$$

$$f_1(y) = (y-1)(y+2)(y-3),$$

$$f_1'(y) = (y+2)(y-3) + (y-1)(y-3) + (y-1)(y+2)$$

इस लिये

$$a_1 = \frac{f(a_1)}{f_1'(a_1)} = \frac{2}{3(-2)} = -\frac{1}{3},$$

$$k_1 = \frac{f(k_1)}{f_1'(k_1)} = \frac{5}{(-3)(-4)} = +\frac{5}{12},$$

$$x_1 = \frac{f(x_1)}{f_1'(x_1)} = \frac{10}{2 \times 4} = \frac{5}{4}$$

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{y^2 + 1}{(y-1)(y+2)(y-3)} = \frac{1}{y-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\therefore \int \frac{y^2 + 1}{(y-1)(y+2)(y-3)} \text{ ताय}$$

$$= \text{ला } (y-3) + \frac{1}{3} \text{ ला } y+2 - \frac{1}{3} \text{ ला } (y-1)$$

१६। पूर्व भिन्न में यदि $f_1(y) = (y-k_1)^n$ फि(y) ऐसा हो तो

पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{y}{\text{भ}} = \frac{f(y)}{f_1(y)} = \frac{f(y)}{(y-k_1)^n \text{फि}(y)} = \frac{\text{का}_1}{(y-k_1)^n} + \frac{\text{का}_2}{(y-k_1)^{n-1}} + \dots$$

$$+ \frac{\text{का}_n}{y-k_1} + \frac{\text{फि}(y)}{\text{फि}(y)}$$

जहाँ $\frac{\text{फि}(y)}{\text{फि}(y)}$ यह और खण्डभिन्नों का योग है ।

ऊपर के समीकरण में दोनों पक्षों को $(y - k_1)^n$ से गुण देने से

$$\frac{f(y)}{f_1(y)} = f_2(y) = का_1 + का_2 (y - k_1) + का_3 (y - k_1)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f_1(y)}{f_1(y)} (y - k_1)^n$$

य के स्थान में k_1 का उत्थापन देने से

$$f_1(k_1) = का_1$$

$$f_1'(k_1) = का_2$$

$$f_1''(k_1) = 2 का_3$$

$$f_1'''(k_1) = 2 \cdot 3 का_4$$

$$f_1^{n-1}(k_1) = (n-1) का_n$$

(१) उदाहरण $\int \frac{११य + ९य^२ + ७य + ५}{य^३ - ५य^२ + ६य - ८}$ ताय इसका मान जानना है तो

यहाँ $\frac{११य^२ + ९य^२ + ७य + ५}{य^३ - ५य^२ + ६य - ८} = \frac{११य^२ + ९य^२ + ७य + ५}{(य-२)^३(य+१)}$, इस लिये

$k_1 = २, n = ३, f_1(y) = य + १ \mid f_2(y) = \frac{११य^२ + ९य^२ + ७य + ५}{य + १}$

$f_3(y) = \frac{३३य^२ + १८य + ७}{य + १} - \frac{११य^२ + ९य^२ + ७य + ५}{(य + १)^२}$

$f_4(y) = \frac{६६य + १८}{य + १} - \frac{२(३३य^२ + १८य + ७)}{(य + १)^२} + \frac{२(११य^२ + ९य + ७य + ५)}{(य + १)^३}$

इस लिये $f_1(k_1) = \frac{११ \times ८ + ९ \times ४ + ७ \times २ + ५}{२ + १} = \frac{८८ + ३६ + १४ + ५}{३}$

$= \frac{१४३}{३} = का_1$

$f_1'(k_1) = \frac{३३ \times ४ + १८ \times २ + ७}{२ + १} - \frac{१४३}{९} = \frac{१३२ + ३६ + ७}{३} - \frac{१४३}{९}$

$= \frac{१७५}{३} - \frac{१४३}{९} = \frac{५२५}{९} - \frac{१४३}{९} = \frac{३८२}{९} = का_२$

और $f_1''(k_1) = \frac{१५०}{३} - \frac{२(१३२ + ३६ + ७)}{९} + \frac{१४३ \times २}{२७}$

$= \frac{१३५०}{२७} - \frac{१०५०}{२७} + \frac{१४३ \times २}{२७} = \frac{३००}{२७} + \frac{२८६}{२७} = \frac{५८६}{२७} = \frac{२९३}{२७} = का_३$

इस लिये भिन्न का रूपान्तर

$$\frac{१४३}{३} \frac{१}{(य-२)^०} + \frac{३८२}{९} \frac{१}{(य-२)^०} + \frac{२९३}{२७} \frac{१}{य-२} + \frac{४}{२७} \frac{१}{य+१}$$

तब

$$\int \frac{११य + ९य^२ + ७य + ५}{य^२ - ५य + ६य^२ + ४य - ८} ताय$$

$$= \frac{१४३}{३} \int \frac{ताय}{(य-२)^०} + \frac{३८२}{९} \int \frac{ताय}{(य-२)^०} + \frac{२९३}{२७} \int \frac{ताय}{य-२} + \frac{४}{२७} \int \frac{ताय}{य+१}$$

$$= \frac{२९३}{२७} ला(य-२) + \frac{४}{२७} ला(य+१) - \frac{१४३}{६(य-२)} - \frac{३८२}{९(य-२)}$$

१७। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो अर्थात् एक मान $अ + क\sqrt{-१}$ हो और दूसरा $अ - क\sqrt{-१}$ तो मानो कि

$$\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{आ_१}{य - (अ + क\sqrt{-१})} + \frac{आ_२}{य - (अ - क\sqrt{-१})} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

जहाँ $\frac{फी(य)}{फि(य)}$ और खण्डों का योग है तो समच्छेद करने से

$$फ(य) = आ_१ \{ य - (अ - क\sqrt{-१}) \} फि(य)$$

$$+ आ_२ \{ य - (अ + क\sqrt{-१}) \} फि(य)$$

$$+ फी(य) \{ य - (अ + क\sqrt{-१}) \} \{ य - (अ - क\sqrt{-१}) \}$$

$$= \{ (आ_१ + आ_२)य - (आ_१ + आ_२)अ + क(आ_१ - आ_२)\sqrt{-१} \} फि(य)$$

$$+ फी(य) \{ य^२ - २अय + अ^२ + क^२ \}$$

अब यहाँ य के मान में $अ + क\sqrt{-१}$ वा $अ - क\sqrt{-१}$ का उत्थापन देने से स्पष्ट है कि $य^२ - २अय + अ^२ + क^२ = ०$

अर्थात् $य^२ - २अय - (अ^२ + क^२)$ तब ऊपर के समीकरण का रूप

$$फ(य) = \{ (आ_१ + आ_२)य - (आ_१ + आ_२)अ + क(आ_१ - आ_२)\sqrt{-१} \} फि(य) \dots (१)$$

ऐसा होगा ।

(१) इस में बार बार यदि $य^२$ के स्थान में $२अय - (अ^२ + क^२)$ का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि अन्त में $दाय + ध = दाय + ध$ ऐसा स्वरूप होगा फिर इस में य के स्थान में $अ + क\sqrt{-१}$ वा $अ - क\sqrt{-१}$ का उत्थापन देने से और असम्भाव्य तथा सम्भाव्य संख्याओं के गुणक समान करने से दा और ध

प्रकट हो जायँगे इन पर से $(आ_१ + आ_२)$ और $(आ_१ + आ_२)अ$ भी प्रकट हो जायँगे । अथवा

$$\begin{aligned} \frac{फ(य)}{फा(य)} &= \frac{आ_१}{य-(अ+क\sqrt{-१})} + \frac{आ_२}{य-(अ-क\sqrt{-१})} + \frac{फी(य)}{फि(य)} \\ &= \frac{आ_१य-(आ_१अ-आ_१क\sqrt{-१}) + आ_२य-(आ_२अ+आ_२क\sqrt{-१})}{य^२-२अय+अ^२+क^२} + \frac{फी(य)}{फि(य)} \\ &= \frac{खाय+गा}{य^२-२अय+अ^२+क^२} + \frac{फी(य)}{फि(य)} \end{aligned}$$

जहाँ $य$ का गुणक $ख$ है और अवशिष्ट $गा$ हैं । अब पूर्ववत् समच्छेद करने से और $य$ के समान घातों के गुणक समान करने से $खा$, और $गा$ व्यक्त हो जायँगे ।

(१) उदाहरण $\int \frac{ताय}{अ^२+य^२}$ इस का मान जानना है ।

$$\text{यहाँ } \frac{१}{अ^२+य^२} = \frac{१}{(अ+य)(अ-य+य^२)} = \frac{आ_१}{य+अ} + \frac{खाय+गा}{य^२-अय+अ}$$

समच्छेद कर अंश को रूप के तुल्य करने से

$$\begin{aligned} १ &= आ_१य^२ - अआ_१य + आ_१अ^२ + खाय^२ + अखाय + गाय + गाअ \\ &= य^२(आ_१ + खा) + य(अखा + गा - अआ_१) + आ_१अ^२ + गाअ \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये } आ_१ + खा = ० \text{ । } अखा + गा - अआ_१ = ० \text{ ।}$$

$$१ = अ(आ_१अ + गा)$$

$$\begin{array}{l|l} अआ_१ + अखा = ० & गा + २अखा = ० \therefore गा = -२अखा \\ गा - अआ_१ + अखा = ० & आ_१ = -खा \end{array}$$

$$\begin{aligned} अआ_१ &= -अखा \therefore १ = अ(आ_१अ + गा) = अ(-अखा - २अखा) \\ &= -३अखा \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{१}{३अ^२} = खा, आ_१ = \frac{१}{३अ} \text{ और } गा = -२अखा = \frac{२}{३अ}$$

इस लिये इनके उत्थापन से

$$\begin{aligned} \int \frac{ताय}{अ^२+य^२} &= \int \frac{ताय}{३अ^२(य+अ)} + \int \frac{-\frac{य}{३अ^२} + \frac{२}{३अ}}{य^२-अय+अ^२} ताय \\ &= \frac{१}{३अ^२} \int \frac{ताय}{(य+अ)} - \frac{१}{३अ^२} \int \frac{य-२अ}{य^२-अय+अ^२} ताय \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3a} \log (y + a) - \frac{1}{6a} \int \frac{2y - a - 3a}{y^2 - ay + a^2} \text{ ताय} \\
 &= \frac{1}{3a} \log (y + a) - \frac{1}{6a} \int \frac{2y - a}{y^2 - ay + a^2} \text{ ताय} \\
 &\quad - \frac{1}{6a} \int \frac{-3a}{y^2 - ay + a^2} \text{ ताय} \\
 &= \frac{1}{3a} \log (y + a) - \frac{1}{6a} \log (y^2 - ay + a^2) + \frac{3}{6a} \int \frac{\text{ताय}}{y^2 - ay + a^2} \\
 &= \frac{1}{3a} \log (y + a) - \frac{1}{6a} \log (y^2 - ay + a^2) \\
 &+ \frac{1}{2a} \int \frac{\text{ताय}}{(y - \frac{a}{2})^2 + \frac{3a^2}{4}} \text{ यदि } l = y - \frac{a}{2} \\
 &= \frac{1}{3a} \log (y + a) - \frac{1}{6a} \log (y^2 - ay + a^2) + \frac{1}{2a} \int \frac{\text{ताय}}{l^2 + \frac{3a^2}{4}} \\
 &= \frac{1}{3a} \log (y + a) - \frac{1}{6a} \log (y^2 - ay + a^2) + \frac{2}{a\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2a} \text{स्प}^{-1} \frac{2y - a}{a\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{3a} \log (y + a) - \frac{1}{6a} \log (y^2 - ay + a^2) + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2y - a}{a\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

वा, $1 = \text{आ}_1(y^2 - ay + a^2) + (\text{खाय} + \text{गा})(y + a)$ इस में यदि $y = -a$

तो $1 = \text{आ}_1(a^2 + a^2 + a^2) = 3a^2 \text{आ}_1$. $\therefore \text{आ}_1 = \frac{1}{3a^2}$ समीकरण में

इस का उत्थापन देने से

$$3a^2 = y^2 - ay + a^2 + 3a^2 (\text{खाय} + \text{गा})(y + a)$$

$$\text{समशोधन से } 3a^2 (\text{खाय} + \text{गा})(y + a) = 2a^2 + ay - y^2$$

$$\text{दोनों पक्षों में } y + a \text{ का भाग देने से } 3a^2 (\text{खाय} + \text{गा}) = 2a - y$$

$$\therefore \text{खाय} + \text{गा} = \frac{2a - y}{3a^2} \text{ इन पर से फिर पूर्वोक्त क्रिया करो ।}$$

अथवा इसी प्रक्रम के (१) समीकरण से यहाँ

$$\text{फ(य)} = 1 = \{ (\text{आ}_1 + \text{आ}_2)y - (\text{आ}_1 + \text{आ}_2)a + \text{क}(\text{आ}_1 - \text{आ}_2)\sqrt{-1} \} \text{ फि(य)}$$

$$= (\text{खाय} + \text{गा})(y + a) = \text{खाय}^2 + \text{गाय} + \text{अखाय} + \text{गाअ}$$

$$= \text{खाय}^2 + (\text{गा} + \text{अखा})y + \text{गाअ}$$

$$\begin{aligned} \text{खा(अय—अ)} + (\text{गा} + \text{अखा})\text{य} + \text{गाअ} &= \text{य(गा} + २\text{अखा)} \\ &+ \text{गाअ—अखा} \end{aligned}$$

$$(\text{यहाँ खा} = \text{आ}_1 + \text{आ}_2 \text{। गा} = (\text{आ}_1 + \text{आ}_2)\text{अ} + \text{क}(\text{आ}_1 - \text{आ}_2) \text{।} \quad \text{—१}$$

$$\text{अव य} = \frac{\text{अ} + \text{अ}\sqrt{३} \text{—१}}{२} \text{मानने से}$$

$$१ = \frac{(\text{अ} + \text{अ}\sqrt{३} \text{—१})}{२} (\text{गा} + २\text{अखा}) + \text{गाअ—अखा} \text{।}$$

$$= \frac{\text{अ}}{२} (\text{गा} + २\text{अखा}) + \text{गाअ—अखा} + \frac{\text{अ}\sqrt{३} \text{—१}}{२} (\text{गा} + \text{अखा})$$

सम्भाव्य और असम्भाव्य के गुणक को तुल्य करने से

$$१ = \frac{\text{अ}}{२} (\text{गा} + २\text{अखा}) + \text{गाअ—अखा} \text{। गा} + २\text{अखा} = ०$$

$$\therefore १ = \text{गाअ—अखा} \quad \text{और गा} = -२\text{अखा}$$

$$\therefore १ = \text{गाअ—अखा} = -२\text{अखा—अखा} = -३\text{अखा}$$

$$\therefore \text{खा} = -\frac{१}{३\text{अ}} \text{ फिर अब पूर्ववत् क्रिया करो ।}$$

१८। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव मान त वार हो तो पूर्ववत्

$$\begin{aligned} \frac{\text{व}}{\text{भ}} &= \frac{\text{फ(य)}}{\text{फा(य)}} = \frac{\text{खातय} + \text{गात}}{(\text{य}^२ - \text{दय} + \text{ध})^n} + \frac{\text{खात-य} + \text{गात-१}}{(\text{य}^२ - \text{दय} + \text{ध})^{n-१}} + \dots \\ &+ \frac{\text{खातय} + \text{गात}}{\text{य}^२ - \text{दय} + \text{ध}} + \frac{\text{फी(य)}}{\text{फि(य)}} \text{—ऐसा मानने से} \end{aligned}$$

फा(य) = (य^२—दय + ध)ⁿफि(य) ऐसा हुआ । फिर समच्छेद करने से

$$\begin{aligned} \text{फ(य)} &= (\text{खातय} + \text{गात}) \text{फि(य)} \\ &+ (\text{खात-य} + \text{गात-१}) (\text{य}^२ - \text{दय} + \text{ध}) \text{फि(य)} \\ &+ \dots + (\text{य}^२ - \text{दय} + \text{ध})^n \text{फी(य)} \dots \text{(१)} \end{aligned}$$

अब यहाँ य के स्थान में उसके असम्भव मान का उत्थापन दो
अर्थात् य^२—दय + ध = ० के मानो तो

(१) का लघुरूप

$$\text{फ(य)} = (\text{खात} + \text{गात}) \text{फि(य)}$$

यहाँ १७वें प्रक्रम से खात और गात का मान निकाल समशोधन करने से

(१) समीकरण का रूप

$$f(y) = (x_{n-1} + g_{n-1}) f_1(y)$$

$$= (x_{n-1} + g_{n-1}) (y^2 - dy + d) f_1(y) + \dots \text{ हुआ ।}$$

यह सरूप समीकरण है और यहाँ इहिना पक्ष $y^2 - dy + d$ इससे निःशेष होता है इस लिये बायें पक्ष भी निःशेष होगा कल्पना करो कि भाग देने से लब्धि $f_2(y)$ है तो

$$f_2(y) = (x_{n-2} + g_{n-2}) f_1(y)$$

$$+ (x_{n-2} + g_{n-2}) (y^2 - dy + d) f_1(y) + \dots \dots (2)$$

यहाँ भी यदि $y^2 - dy + d = 0$ तो (2) का रूप

$$f_2(y) = (x_{n-2} + g_{n-2}) f_1(y) \text{ इस से १७वें प्रक्रम से}$$

x_{n-2} और g_{n-2} निकाल फिर समशोधन और $y^2 - dy + d$ का दोनों पक्षों में भाग देने से बायें पक्ष को $f_1(y)$ मानने से और $y^2 - dy + d = 0$ करने से इसी प्रकार x_{n-3} , g_{n-3} इत्यादि भी व्यक्त हो जायेंगे ।

(१) उदाहरण $\int \frac{k(y^2 - 3y - 2)}{(y^2 + y + 1)^2 (y + 1)^2} dy$ ता यह इसका मान जानना है तो

$$\text{यहाँ } \frac{y^2 - 3y - 2}{(y^2 + y + 1)^2 (y + 1)^2} = \frac{x_{2y} + g_{2y}}{(y^2 + y + 1)^2} + \frac{x_{1y} + g_{1y}}{y^2 + y + 1} + \frac{f_1(y)}{(y + 1)^2}$$

$$\text{तब } y^2 - 3y - 2 = (x_{2y} + g_{2y}) (y + 1)^2$$

$$+ (x_{1y} + g_{1y}) (y^2 + y + 1) (y + 1) + (y^2 + y + 1) f_1(y) \dots (3)$$

इस में $y^2 + y + 1 = 0$ करने से

$$y - 3y - 2 = (x_{2y} + g_{2y}) (y + 1)^2$$

$$= (x_{2y} + g_{2y}) (y^2 + 2y + 1)$$

y के स्थान में $-y - 1$ का उत्थापन देने से

$$-4y - 3 = (x_{2y} + g_{2y}) y$$

$$= x_{2y} y + g_{2y} y = -x_{2y} - x_{2y} + g_{2y} y$$

इस लिये $-4 = g_{2y} - x_{2y}$ और $-3 = -x_{2y}$, $3 = x_{2y}$ और

$$-4 = g_{2y} - x_{2y} = g_{2y} - 3, \therefore -1 = g_{2y}$$

(३) इनका उत्थापन देकर समशोधन करने से

$$y^2 - 3y - 2 = (3y - 1) (y + 1)^2$$

$= (\text{खा}_r \text{य} + \text{गा}_r) (\text{य} + \text{य} + 1) (\text{य} + 1) + (\text{य} + \text{य} + 1) \text{फी}(\text{य})$
दोनों पक्षों में $\text{य} + \text{य} + 1$ का भाग देने से

$$-(3\text{य} + 1) = (\text{खा}_r \text{य} + \text{गा}_r) (\text{य} + 1) + (\text{य} + \text{य} + 1) \text{फी}(\text{य}) \dots \dots (४)$$

फिर इस में $\text{य} + \text{य} + 1 = 0$ मानने से

$$-(3\text{य} + 1) = (\text{खा}_r \text{य} + \text{गा}_r) (\text{य} + 1) = (\text{खा}_r \text{य} + \text{गा}_r) (\text{य} + \text{य} + 1 + \text{य})$$

$$= (\text{खा}_r \text{य} + \text{गा}_r) \text{य} = -\text{खा}_r (\text{य} + 1) + \text{गा}_r \text{य} ।$$

इस लिये $-3 = -\text{खा}_r + \text{गा}_r$ और $-1 = -\text{खा}_r$, $1 = \text{खा}_r$ और

$-2 = \text{गा}_r$ अब (४) में इनका उत्थापन दे समशोधन कर $\text{य} + \text{य} + 1$
का भाग देने से $-(\text{य}-1) = \text{फी}(\text{य})$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{फी}(\text{य})}{(\text{य}+1)} = -\frac{\text{य}-1}{(\text{य}+1)} = -\frac{\text{य}+1}{(\text{य}+1)} + \frac{2}{(\text{य}+1)}$$

$$= -\frac{1}{\text{य}+1} + \frac{2}{(\text{य}+1)^2}$$

तब

$$\int \frac{\text{य} - 3\text{य} - 2}{(\text{य} + \text{य} + 1)^2 (\text{य} + 1)^2} \text{ताय} = \int \frac{3\text{य} - 1}{(\text{य} + \text{य} + 1)^2} \text{ताय}$$

$$+ \int \frac{\text{य} - 2}{\text{य}^2 + \text{य} + 1} \text{ताय} + \int \frac{2\text{ताय}}{(\text{य} + 1)} - \int \frac{\text{ताय}}{\text{य} + 1}$$

यहाँ बारहवें प्रक्रम से सब का मान जान सकते हो पहले खण्ड का
यदि मान व्यक्त हो तो । पहले का मान जानने के लिये पहले मानो कि

$\int \frac{\text{तार}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^n}$ इस का मान जानना है तो

$$\frac{\text{तार}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^n} = \frac{1}{\text{अ}^n} \cdot \frac{(\text{र}^2 + \text{अ} - \text{र}) \text{तार}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^n} = \frac{1}{\text{अ}^n} \cdot \frac{\text{तार}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^{n-1}}$$

$$- \frac{1}{\text{अ}^n} \cdot \frac{\text{रतार} \cdot \text{र}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^n}$$

परन्तु खण्ड चलानयन से $\frac{1}{\text{अ}^n} \int \frac{2\text{रतार} \cdot \text{र}}{2(\text{र}^2 + \text{अ})^n}$

$$= -\frac{1}{\text{अ}^n} \frac{1}{2(n-1)} \frac{\text{र}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^{n-1}} + \frac{1}{\text{अ}^n} \cdot \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{\text{तार}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^{n-1}}$$

$$\text{इस लिये } \int \frac{\text{तार}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^n} = \frac{1}{\text{अ}^n} \frac{1}{2(n-1)} \frac{\text{र}}{(\text{र}^2 + \text{अ})^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{a} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{\text{तार}}{(r^2+a^2)^{n-1}} \cdot (अ)$$

इस (अ) सिद्धान्त को अच्छी तरह से सीखो ।

$$\begin{aligned} \text{ऊपर के उदाहरण में } \frac{2y-1}{(y^2+y+1)} &= \frac{2(y-\frac{1}{2})}{(y^2+y+1)} \\ &= \frac{2(2y+1-\frac{1}{2})}{(y^2+y+1)} = \frac{2(2y+1)}{(y^2+y+1)} - \frac{1}{(y^2+y+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \int \frac{2y-1}{(y^2+y+1)} \text{ ताय} \\ &= \frac{2}{3} \int (2y+1) \text{ ताय } (y^2+y+1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \int \frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{y^2+y+1} - \frac{1}{3} \int \frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\text{ताय}}{(y+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\text{तार}}{(r^2+a^2)^{\frac{2}{3}}}, \text{ यदि } r = y + \frac{1}{2}$$

और $\frac{2}{3} = a^3$

(अ) सिद्धान्त से

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^{\frac{2}{3}}} &= \int \frac{\text{तार}}{(r^2+a^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2y+1}{2(r^2+a^2)} \\ &+ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{\text{तार}}{r^2+a^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2y+1}{y^2+y+1} + \frac{2}{3} \int \frac{\text{ताय}}{y^2+y+1} = \frac{1}{3} \frac{2y+1}{y^2+y+1} + \frac{2}{3} \frac{2}{\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{और } \frac{y-2}{y^2+y+1} = \frac{1}{3} \frac{(2y-4)}{y^2+y+1} = \frac{1}{3} \frac{(2y+1-5)}{y^2+y+1} = \frac{1}{3} \frac{(y+1)}{y^2+y+1} - \frac{5}{3} \frac{1}{y^2+y+1}$$

इसलिये

$$\begin{aligned} \int \frac{y-2}{y^2+y+1} \text{ताय} &= \frac{1}{3} \int (2y+1) \text{ताय} - (y^2+y+1) - \frac{5}{3} \int \frac{\text{ताय}}{y^2+y+1} \\ &= \frac{1}{3} \text{ला}(y^2+y+1) - \frac{5}{3} \int \frac{\text{तार}}{r^2+a^2} = \frac{1}{3} \text{ला}(y^2+y+1) - \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$2 \int \frac{\text{ताय}}{(y+1)^2} = \frac{-2}{y+1} \text{। और } \int \frac{\text{ताय}}{y+1} = \text{ला}(y+1) \text{ इन सबको इकट्ठा करने से}$$

$$\int \frac{३य-१}{(य^२+य+१)^२} ताय$$

$$= -\frac{३}{२(य^२+य+१)} - \frac{२य+१}{य^२+य+१} - \frac{२}{\sqrt{३}} \frac{स्प^{-१}}{\sqrt{३}} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{य-२}{य^२+य+१} = \frac{१}{३} ला(य^२+य+१) - \frac{२स्प^{-१}}{\sqrt{३}} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{२ताय}{(य+१)^२} = -\frac{२}{य+१}$$

$$\int \frac{ताय}{य+१} = ला(य+१)$$

इस लिये

$$\int \frac{३य-१}{(य^२+य+१)^२} ताय + \int \frac{य-२}{य^२+य+१} ताय + \int \frac{२ताय}{(य+१)^२} - \int \frac{ताय}{य+१}$$

$$= -\frac{३}{२(य^२+य+१)} - \frac{२य+१}{य^२+य+१} - \frac{२५}{३} \frac{१}{\sqrt{३}} \frac{स्प^{-१}}{\sqrt{३}} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$+ \frac{१}{३} ला(य^२+य+१) - \frac{२}{य+१} - ला(य+१) ।$$

$$\int \frac{तार}{(र^२+अ^२)^न} इस में यदि अ. स्पष = र तो \frac{अ.ताप}{कोज्या^२प} = तार$$

$$\text{और } (र^२+अ^२) = अ^२स्प^२ष+अ^२ = अ^२(लें^२ष) = \frac{अ^२}{कोज्या^२प}$$

$$\text{इस लिये } \frac{तार}{(र^२+अ^२)^न} = \int \frac{अ.ताप}{कोज्या^२प \left[\frac{अ^२}{कोज्या^२प} \right]^न} = \int \frac{अ.ताप.कोज्या^{२नप}}{अ^{२न}कोज्या^२प}$$

$$= \frac{१}{अ^{२न-२}} \int तापकोज्या^{२न-२}प$$

$$= \frac{ज्याष}{मअ^{२न-२}} \left\{ कोज्या^{म-१}प + \frac{म-१}{म-२} कोज्या^{म-३}प + \frac{(म-१)(म-३)}{(म-२)(म-४)} कोज्या^{म-५}प + \dots \right\}$$

$$+ \frac{(म-१)(म-३)(म-५)\dots १}{अ^{२न-२}म(म-२)(म-४)\dots २} प$$

१२वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण की विधि से । यहाँ २न-२ = म ।

$$\text{इस तरह से भी } \int \frac{तार}{(र^२+अ^२)^न} \text{ इसका मान जान सकते हो ।}$$

१९। ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि किसी अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध के चलानयन के लिये जो खण्ड भिन्न किये गये हैं उनका चार प्रकार का रूप होता है

$$(१) \frac{आ_१ताय}{य-अ_१}, (२) \frac{का_१ताय}{(य-क_१)^१}$$

$$(३) \frac{(खाय + गा)ताय}{य-२अ_१य + अ_१^२ + क_१^२} = \frac{खाय + गा}{(य-अ_१)^२ + क_१^२}ताय$$

(४) $\frac{च_१य + ज_१}{(य-ग_१)^२ + घ_१^२}$ ताय इन में (१), (२), (३) का चलानयन तो पहले कर आये हैं रहा चौथा उसको यदि

$$\begin{aligned} \frac{च_१य + ज_१}{(य-ग_१)^२ + घ_१^२} ताय &= \frac{च_१य - च_१ग_१ + च_१ग_१ + ज_१}{(य-ग_१)^२ + घ_१^२} ताय \\ &= \frac{च_१(य-ग_१)ताय}{(य-ग_१)^२ + घ_१^२} + \frac{च_१ग_१ + ज_१}{(य-ग_१)^२ + घ_१^२} ताय \end{aligned}$$

यहां पहले खण्ड का चल पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि

$$\frac{-च_१}{२(य-१) \{ (य-ग_१)^२ + घ_१^२ \}^{१/२}} यह है$$

दूसरे खण्ड में यदि $य-ग_१ = र$ तो

$$\frac{च_१ग_१ + ज_१}{(य-ग_१)^२ + घ_१^२} ताय = \frac{स्थितार}{(र + घ_१^२)^{१/२}} । इसका मान १८वें प्रक्रम के$$

(अ) सिद्धान्त से स्पष्ट है, यहाँ $च_१ग_१ + ज_१ = स्थि$ ।

अब इन चारों भेदों के चल से अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध का चलानयन कर सकते हैं ।

२०। ऊपर के प्रकारों के चल से अनेक चलानयन कर सकते हैं । जैसे यदि

$$\int \frac{फ(य)ताय}{फा(य)}$$
 इस का मान जानना हो तो यदि $र = य$ तो तार = श्यताय

$$\text{इस लिये ताय} = \frac{तार}{श्य} \text{ और } \int \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{फ(र)}{फा(र)} \text{ अब यहाँ यदि } र \text{ के मान}$$

सब सम्भव और परस्पर भिन्न हों तो खण्ड भिन्न का कोई मान

$$\frac{फ(अ_१)}{फा(अ_१)} \cdot \frac{१}{र-अ_१} = \frac{फ(अ_१)}{फा(अ_१)} \cdot \frac{१}{य-अ_१} \text{ ऐसा होगा जहाँ } अ_१, र \text{ का कोई मान है।}$$

$$\text{इस पर से } \int \frac{फ(अ_१)}{फा(अ_१)} \frac{ताय}{य-अ_१} = \frac{फ(अ_१)}{फा(अ_१)} \int \frac{ताय}{य-अ_१}$$

यहाँ चाहे अ, धनात्मक वा ऋणात्मक हो १२वें प्रक्रम से $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}}$ का मान जान सकते हो ।

यदि र के मान में एक जोड़ा असम्भाव्य राशि हो जिनका मान $\text{अ} + \text{क}\sqrt{-१}$ और $\text{अ} - \text{क}\sqrt{-१}$ हो तो इनके वश से खण्ड भिन्न संबंध का मान

$$= \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{(\text{य}^२ - \text{अ}) + \text{क}} = \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{\text{य}^२ - २\text{अय} + \text{ग}}, \text{ जहाँ ग} = \text{अ} + \text{क}^२ \text{। यहाँ यदि}$$

$$\text{अ} = \text{गकोज्या२इ तो इस भिन्न का रूप} = \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{\text{य}^२ - २\text{गय कोज्या२इ} + \text{ग}}$$

$$= \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{(\text{य}^२ - २\text{य}\sqrt{\text{ग कोज्याइ}} + \text{ग})(\text{य} + २\text{य}\sqrt{\text{ग कोज्याइ}} + \text{ग})}$$

इस लिये पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{\text{खाय} + \text{गा}}{\text{य}^२ - २\text{य}\sqrt{\text{गकोज्या२इ}} + \text{ग}} = \frac{\text{खा}_१\text{य} + \text{गा}_१}{\text{य}^२ - २\text{य}\sqrt{\text{ग कोज्याइ}} + \text{ग}}$$

$$+ \frac{\text{खा}_२\text{य} + \text{गा}_२}{\text{य}^२ + २\text{य}\sqrt{\text{ग कोज्याइ}} + \text{ग}} \text{ इस पर से पूर्ववत् स्पष्ट है कि}$$

$$\text{खा}_१ = -\text{खा}_२ = \frac{\text{खाग} - \text{गा}}{२\text{ग}\sqrt{\text{कोज्याइ}}}, \text{ गा}_१ = \text{गा}_२ = \frac{\text{गा}}{२\text{ग}} \text{ इनका उत्थापन ऊपर के}$$

खण्ड भिन्नों में देने से और थोड़ा सा परिष्कर्त्तन करने से

$$\int \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{\text{य}^२ - २\text{अय} + \text{ग}} = \frac{\text{खाग} - \text{गा}}{२\text{ग}\sqrt{\text{कोज्याइ}}} \text{ ला } \left[\frac{\text{य}^२ - २\text{य}\sqrt{\text{ग कोज्याइ}} + \text{ग}}{\text{य} + २\text{य}\sqrt{\text{ग कोज्याइ}} + \text{ग}} \right]$$

$$+ \frac{\text{खाग} + \text{गा}}{२\text{ग}\sqrt{\text{कोज्याइ}}} \text{ स्प } \left[\frac{२\text{य}\sqrt{\text{ग कोज्याइ}}}{\text{ग}^२ - \text{य}^२} \right]$$

२१। यदि $\frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})^m(\text{य}-\text{क})^n}$ इस का चल जानना हो तो इसे खण्ड भिन्नों के रूप में न ला कर भी नीचे की युक्ति से सहज में चल मान जान सकते हो ।

$$\text{कल्पना करो कि } \text{य}-\text{अ} = (\text{य}-\text{क}) र \text{ तो } \text{य} = \frac{\text{अ}-\text{कर}}{१-र}$$

$$\therefore \text{य}-\text{अ} = \frac{(\text{अ}-\text{क})र}{१-र}, \text{य}-\text{क} = \frac{\text{अ}-\text{क}}{१-र} \text{ और ताय} = \frac{(\text{अ}-\text{क})\text{तार}}{(१-र)^2} \text{ ऊपर के मान}$$

में इनका उत्थापन देने से $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})^m(\text{य}-\text{क})^n} = \int \frac{(1-r)^{m+n-2}}{r^m(\text{अ}-\text{क})^{m+n-2}}$ तार
इस का मान अब द्वियुक्पदसिद्धान्त से सहज में जान सकते हो ।

जैसे $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})}$ यहाँ $m = 1, n = 2, m+n-2 = 2, m+n-1 = 3$
इस लिये $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})^2} = \int \frac{(1-r)^{m+n-2}}{r^m(\text{अ}-\text{क})^{m+n-2}}$ तार $= \int \frac{(1-r)^2}{r(\text{अ}-\text{क})^2}$ तार
 $= \int \frac{1-2r+r}{r(\text{अ}-\text{क})^2}$ तार $= \frac{1}{(\text{अ}-\text{क})^2} \left\{ \text{लार}-2r + \frac{r^2}{2} \right\}$ इसमें r के स्थान में
 $\frac{\text{य}-\text{अ}}{\text{य}-\text{क}}$ का उत्थापन देने से y के रूप में ऊपर का चल सिद्ध हो जायगा ।

यहाँ यदि $\text{अ} = \text{क}$ तो ऊपर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा ।

२२। $\frac{\text{य}^m \text{ताय}}{(\text{अ} + \text{गय})^n}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ m और n अभिन्न

$$\text{संख्या हैं और } \text{य}^3 = \frac{\text{र अ}}{\text{ग}}$$

मानो कि $\text{अ} + \text{गय}^3 = \text{र}$ तो तार $= \text{रगयताय}$. . ताय $= \frac{\text{तार}}{\text{र गय}}$ ।

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{य}^m \text{ताय}}{(\text{अ} + \text{गय})^n} = \frac{\text{य}^m \times \text{यताय}}{\text{र}^n} = \frac{\text{य}^m \cdot \text{तार}}{\text{रगय}^n} = \frac{(\text{य})^m \text{तार}}{\text{रगय}^n}$$

$$= \frac{(\text{र}-\text{अ})^m \text{तार}}{\text{रग}^m \text{र}^n}$$
 यह ऐसे रूप में आ गया जिसका चल द्वियुक्पद-

सिद्धान्त से ला सकते हो ।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि $\frac{\text{फ}(\text{य}^3) \text{यताय}}{(\text{अ} + \text{गय}^3)^n}$ इस का चलानयन भी
अत्यन्त सुगम है यदि $\text{फ}(\text{य}^3)$ में य^3 का कोई अभिन्न ही घात हो तो ।

२३। $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^n - 1}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ n धन और अभिन्न है
मानो कि $\text{य}^n - 1 = 0$ इस समीकरण से य का एक असम्भव मान अ_2 है
तो दूसरा असम्भव मान अ_2^{-1} यह होगा यहाँ

$$\text{अ}_2 = \text{कोज्या} \frac{2\pi}{n} + \text{ज्या} \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1} \text{ है}$$

(चलनकलन का ८८वाँ प्रक्रम देखो वा डेमाइवर का सिद्धान्त) जहाँ त का मान १, २, ३ इत्यादि धन संख्या है ।

यहाँ १४वें प्रक्रम से $y^n - 1$ इस के एक खण्ड भिन्न का मान जब

$$y = a_2 \quad \text{तो} \quad \frac{1}{n a_2^{n-1}} \cdot \frac{1}{(y - a_2)} = \frac{a_2}{n a_2^n (y - a_2)}$$

$$= \frac{a_2}{n(y - a_2)} \quad \text{यह होगा और दूसरे का} \quad \frac{a_2'}{n(y - a_2')} \quad \text{यह}$$

जहाँ $y = a_2'$ इन दोनों खण्डभिन्नों का योग करने से

$$\text{योग} = \frac{1}{n} \left[\frac{a_2}{y - a_2} + \frac{a_2'}{y - a_2'} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(a_2 + a_2')y - 2}{y^2 - (a_2 + a_2')y + 1} \right\} \text{ऐसा हुआ ।}$$

इस में $a_2 + a_2' = 2$ के स्थान में $2 \cos \frac{2\pi}{n}$ का उत्थापन देने से

$$\text{और} \quad \frac{2 \cos \frac{2\pi}{n}}{n} = \text{ष मानने से योग} = \frac{2}{n} \frac{y \cos \frac{2\pi}{n} - 1}{y^2 - 2y \cos \frac{2\pi}{n} + 1} \text{ऐसा होगा}$$

जिस का चल १२वें प्रक्रम के १०वें उदाहरण से

$$\frac{\cos \frac{2\pi}{n}}{n} \text{ ला } (1 - 2y \cos \frac{2\pi}{n} + y^2)$$

$$= \frac{2 \cos \frac{2\pi}{n}}{n} \text{ स्प } \left[\frac{y - \cos \frac{2\pi}{n}}{\cos \frac{2\pi}{n}} \right] \text{ ऐसा होगा ।}$$

यहाँ n के सम और विषम के वश से दो भेद होंगे ।

(१) मानो कि $n = 2m$ । इस स्थिति में $y^n - 1 = y^{2m} - 1 = 0$ इस में y के दो मान $+1, -1$ ये सम्भव होंगे, इस लिये

$$\int \frac{t \, dt}{y^{2m} - 1} = \frac{1}{2m} \text{ ला } \frac{y - 1}{y + 1}$$

$$+ \frac{1}{2m} \text{ से गुणित को ज्या } \frac{2\pi}{m} \text{ ला } (1 - 2y \cos \frac{2\pi}{m} + y^2)$$

इनके मान जो t के स्थान में 1 से ले $m - 1$ तक उत्थापन देने से हों और उस में

$$= \frac{1}{m} \text{ से गुणित ज्या } \frac{2\pi}{m} \text{ स्प } \left[\frac{y - \cos \frac{2\pi}{m}}{\cos \frac{2\pi}{m}} \right] \text{ इन के मान}$$

जो त के स्थान में १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हों ।

यहाँ त के स्थान में १, २, ... म—१ इन का उत्थापन देने से जो मान हों उन का योग क्रम से यौ कोज्या $\frac{\pi}{m}$ ला (१—२ य कोज्या $\frac{\pi}{m} + य^३$) और

यौ ज्या $\frac{\pi}{m}$ स्प^० $\left[\frac{य-कोज्या \frac{\pi}{m}}{ज्या \frac{\pi}{m}} \right]$ मानो तो ऊपर का समीकरण

$$\int \frac{ताय}{य^{२m-१}} = \frac{१}{२m} ला \frac{य-१}{य+१}$$

$$+ \frac{१}{२m} यौ कोज्या \frac{\pi}{m} ला (१-२य कोज्या \frac{\pi}{m} + य^३)$$

$$- \frac{१}{m} यौ ज्या \frac{\pi}{m} स्प^० \left[\frac{य-कोज्या \frac{\pi}{m}}{ज्या \frac{\pi}{m}} \right] \dots \dots (१)$$

(२) कल्पना कगे कि n = २ m + १ तो

$$\int \frac{ताय}{य^{२m+१}-१} = \frac{ला(य-१)}{२m+१}$$

$$+ \frac{१^०}{२m+१} यौ कोज्या \frac{२\pi}{२m+१} ला(१-२य कोज्या \frac{२\pi}{२m+१} + य२)$$

$$- \frac{२}{२m+१} यौ ज्या \frac{२\pi}{२m+१} स्प^१ \left[\frac{य-कोज्या \frac{२\pi}{२m+१}}{ज्या \frac{२\pi}{२m+१}} \right]$$

यहाँ यौ का मान त के स्थान में १, २, ३ ... म का उत्थापन देने से जानो ।

२४। $\int \frac{य^{m-१} ताय}{य^n-१}$ इस का मान जानना हो जहाँ m, n से छोटा

है तो यहाँ भी पहले के ऐसी क्रिया करने से एक खण्ड भिन्न का मान

$$\frac{अ_१^{m-१}}{n अ_१^{n-१} (य-अ_१)} = \frac{अ_२^m}{n (य-अ_२)} यह$$

और दूसरा $\frac{अ_१^{-m}}{n (य-अ_१^{-१})}$ यह होगा यहाँ भी अ_१, अ_१^{-१} दोनों य के

कोई एक जोड़ा असम्भव मान हैं । इस लिये दोनों खण्ड भिन्नों का

$$\text{योग करने से } \frac{१}{n} \left[\frac{अ_२^m}{य-अ_२} + \frac{अ_१^{-m}}{य-अ_१^{-१}} \right]$$

$$= \frac{१}{n} \frac{य(अ_१^m + अ_२^{-m}) - (अ_१^{m-१} + अ_२^{-(m-१)})}{य^n - य(अ_२ + अ_१^{-१}) + १}$$

$$= \frac{२}{न} \frac{\text{यकोज्यामप} - \text{कोज्या} (म-१) प}{य^२ - २यकोज्याप + १} \text{ यह हुआ ।}$$

जहाँ प = $\frac{२तण}{न}$ । यहाँ त्रिकोणमिति से यदि कोज्या (म-१)प का मान

कोज्यामप · कोज्याप + ज्यामष · ज्याप इस रूप में ले आवो तो वही मान

$$\frac{२}{न} \frac{\text{यकोज्यामष} - \text{कोज्यामपकोज्याप} - \text{ज्यामपज्याप}}{य^२ - २यकोज्याप + १}$$

$$= \frac{१}{न} \left\{ \frac{(२य - २कोज्याप)कोज्यामप}{य^२ - २यकोज्याप + १} - २ज्यामप \frac{\text{ज्याप}}{(य - कोज्याप) + ज्याप} \right\}$$

ऐसा हुआ इस लिये १२वें प्रक्रम से

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न-१}} = \frac{१}{न} \text{ यौ कोज्यामप} \cdot \text{ला}(य - २यकोज्याप + १)$$

$$- \frac{१}{न} \text{ यौज्यामष स्प}^{-१} \left\{ \frac{य - कोज्याप}{ज्याप} \right\} + \frac{१}{न} \text{ ला}(य-१) + \frac{(-१)^म}{न} \text{ ला}(य+१)$$

यदि न सम हो जहाँ यौ का मान त के स्थान में १ से ले $\frac{न}{२} - १$ तक का उत्थापन देने से है ।

$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न-१}}$ इस के मान में असम्भव के वश से जो खण्ड चल हैं उन को पहले दो खण्डों में लिखा है और सम्भव के दो चल अन्त में हैं क्योंकि न का मान सम होने से $य^{न-१} = ०$ इस में य का एक मान + १ दूसरा - १ दो सम्भव आते हैं और भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न(य-१)} + \frac{(-१)^म}{न(य+१)} + \frac{१}{न} \text{ यौ} \frac{\text{कोज्यामप}(य - कोज्याप) - ज्यामपज्याप}{य^२ - २यकोज्याप + १}$$

और यदि न विषम हो तो $य^{न-१} = ०$ इस में य का एक ही सम्भाव्य मान + १ होगा, इस लिये भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न} \frac{१}{य-१} + \frac{२}{न} \text{ यौ} \frac{\text{कोज्यामष}(य - कोज्याप) - ज्यामपज्याप}{य^२ - २यकोज्याप + १} \text{ यह होगा}$$

तब पहले के ऐसा

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न-१}} = \frac{१}{न} \text{ ला}(य-१) + \frac{१}{न} \text{ यौकोज्यामपला}(य^२ - २यकोज्याप + १)$$

$$- \frac{२}{न} \text{ यौज्यामप स्प}^{-१} \left[\frac{य - कोज्याप}{ज्याप} \right] \text{ यहाँ त के स्थान में}$$

१, से $\frac{n-1}{2}$ तक का उत्पादन देने से यौ का मान जानना ।

२५। $\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1}$ इस का मान जानना हो जहाँ m n से छोटा

है तो यदि n सम हो तो $y^n + 1 = 0$ इस में y का कोई सम्भव मान न आवेगा इस लिये एक सम्भव मान यदि a_2

$$= \text{कोज्या } \frac{\pi}{n} + \text{ज्या } \frac{\pi}{n} \sqrt{-1} \text{ और दूसरा } a_2^{-1} = \frac{1}{\text{कोज्या } \frac{\pi}{n} + \text{ज्या } \frac{\pi}{n} \sqrt{-1}}$$

= कोज्या $\frac{\pi}{n} - \text{ज्या } \frac{\pi}{n} \sqrt{-1}$ मानो तो एक खण्ड भिन्न का मान

$$\frac{a_2^{m-1}}{a_2^{n-1} n (y - a_2)} = - \frac{a_2^m}{n (y - a_2)} \text{ यह और दूसरा } - \frac{a_2^{-m}}{n (y - a_2^{-1})}$$

यह हुआ इस लिये कोई दो मानों का योग

$$= - \frac{1}{n} \frac{\text{कोज्यामप}(y - \text{कोज्याप}) - \text{ज्यामपज्याप}}{y^n - 2y \text{कोज्याप} + 1} \text{ जहाँ } p = \frac{\pi}{n}$$

तब पूर्वप्रकार के ऐसा ।

$$\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} = - \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला} (y^n - 2y \text{कोज्याप} + 1)$$

$$+ \frac{1}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \text{ जहाँ } t \text{ के स्थान में } 1, 2, 4,$$

७... $n-1$ का उत्पादन दे कर यौ का मान जानना होगा ।

और यदि n विषम हो तो $y^n + 1 = 0$ इस में y का एक मान

-1 यह सम्भाव्य होगा इस लिये

$$\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n} \text{ला}(y + 1)$$

$$- \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला}(y^n - 2y \text{कोज्याप} + 1) + \frac{1}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}}$$

यह होगा जहाँ n के स्थान में $1, 2, 4 \dots n-2$ का उत्थान देकर

यौ का मान जानना है ।

२६। $\frac{f(y)}{y^n - 1}$ इस का मान खण्ड भिन्न में जानना हो जहाँ

$f(y) = g_0 + g_1 y + g_2 y^2 + \dots + g_{m-1} y^{m-1}$ जहाँ n से m छोटा है वा समान ।

तो n के सम मान में $y^n - 1 = 0$ इस में $y = +1, -1$ ये दो

मान सम्भाव्य हैं और असम्भव मान में कोई एक जोड़े का मान a_2 , a_2^{-1} मानो तो इन दोनों से उत्पन्न खण्ड भिन्न क्रम से

$\frac{a_2 f(a_2)}{n(y-a_2)}$, और $\frac{a_2^{-1} f(a_2^{-1})}{n(y-a_2^{-1})}$ होंगे, इन दोनों का योग

$$= \frac{1}{n} \frac{\{ a_2 f(a_2) + a_2^{-1} f(a_2^{-1}) \}}{y - (a_2 + a_2^{-1})y + 1}$$

परन्तु $a_2 = \text{कोज्या } \frac{2\pi}{n} + \text{ज्या } \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1}$

$a_2^{-1} = \text{कोज्या } \frac{2\pi}{n} - \text{ज्या } \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1}$

$$f(a_2) = g_0 + g_1 a_2 + g_2 a_2^2 + g_3 a_2^3 + \dots$$

$$a_2 f(a_2) = g_0 a_2 + g_1 a_2^2 + g_2 a_2^3 + g_3 a_2^4 + \dots$$

$$a_2^{-1} f(a_2^{-1}) = g_0 a_2^{-1} + g_1 a_2^{-2} + g_2 a_2^{-3} + g_3 a_2^{-4} + \dots$$

इस लिये $a_2 f(a_2) + a_2^{-1} f(a_2^{-1})$

$$= 2g_0 \text{कोज्या } \pi + 2g_1 \text{कोज्या } 2\pi + \dots + 2g_{m-1} \text{कोज्या } m\pi$$

$$\text{और } f(a_2) + f(a_2^{-1}) = 2g_0 + g_1 \text{कोज्या } \pi + g_2 \text{कोज्या } 2\pi + \dots + 2g_{m-1} \text{कोज्या } (m-1)\pi$$

$$\text{तब } \frac{f(y)}{y^n - 1} = \frac{f(-1)}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{y+1} + \frac{f(1)}{n} \frac{1}{y-1}$$

$$+ \frac{1}{n} \frac{\text{यौ } (g_0 \text{कोज्या } \pi + \dots + g_{m-1} \text{कोज्या } m\pi) y}{y^n - 2y \text{कोज्या } \pi + 1}$$

$$- \frac{\text{यौ } \{ g_0 + g_1 \text{कोज्या } \pi + \dots + g_{m-1} \text{कोज्या } (m-1)\pi \}}{y^n - 2y \text{कोज्या } \pi + 1}$$

यहाँ t के स्थान में $1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ का उत्थापन देकर यौ का मान जानना । यदि n विषम हो तो $y^n - 1 = 0$ इस में y का एक ही $+1$ मान सम्भाव्य होगा इस लिये ऊपर के मान में पहला खण्ड छोड़ देना चाहिये और t के स्थान में $1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ का उत्थापन देकर यौ का मान ले आना चाहिये ।

२७। इसी प्रकार यदि $\frac{f(y)}{y^n + 1}$ इस का रूप खण्ड भिन्नों में लाना हो तो

ऊपर की युक्ति से ला सकते हो विशेष इतना ही है कि a_2 का मान $\text{कोज्या } \frac{2\pi}{n} + \text{ज्या } \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1}$ यह कल्पना करना चाहिये जहाँ t के स्थान में $1, 2, \dots, n-1$ इत्यादि का उत्थापन देना चाहिये यदि n सम हो और यदि n विषम हो तो $1, 3, 5, \dots, n-2$ का ।

२८। इस प्रक्रम में क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखा कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं ।

(१) उदा० $\int \frac{य^ताय}{(अ^र-य^र)^२}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २२वें प्रक्रम से $५ = २म + १$, $म = २$, $न = २$, $ग = -१$ और अ के स्थान में $अ^२$ और $(अ^२-य^२)$ के स्थान में $र$ का उत्थापन देने से ।

$$\begin{aligned} \int \frac{य^ताय}{(अ^र-य^र)^२} &= \int \frac{(र-अ)^म तार}{२ग^म+(र^n)} = \int \frac{(र-अ)^२}{२ग^३ \cdot र^२} तार \\ &= \int \frac{र^३-२रअ+अ^३}{२ग^३ र^२} तार = \frac{१}{२ग^३} \int तार - २अ \int \frac{तार}{र} + अ^३ \int तार र^{-२} \\ &= \frac{१}{२ग^३} \left[र-२अलार - \frac{अ^३}{र} \right] \\ &= -\frac{१}{२} \left[अ^३-य^३ - २अला(अ^३-य^३) - \frac{अ^३}{अ^३-य^३} \right] \\ &= \frac{अ^३}{२(अ^३-य^३)} + \frac{य^३}{२} + अला(अ^३-य^३) । स्थिराङ्क $\frac{अ^३}{२}$ को छोड़ देने से यही उत्तर हुआ । \end{aligned}$$

(२) उदा० $\int \frac{ताय}{य^म-१}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २३वें प्रक्रम के प्रथम समीकरण से

$न = ४$ । $म = २$ और $त$ के स्थान में १ का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \int \frac{ताय}{य^म-१} &= \frac{१}{२म} ला \frac{य-१}{य+१} \\ &+ \frac{१}{२म} यौकोज्या^{\frac{त\pi}{म}} ला (य^२-२यकोज्या^{\frac{त\pi}{म}} + १) \\ &- \frac{१}{२म} यौज्या^{\frac{त\pi}{म}} स्प^{-१} \left[\frac{य-कोज्या^{\frac{त\pi}{म}}}{ज्या^{\frac{त\pi}{म}}} \right] \\ &= \frac{१}{४} ला \frac{य-१}{य+१} + \frac{१}{४} कोज्या^{\frac{\pi}{४}} ला (य^२-२कोज्या^{\frac{\pi}{४}} + १) \\ &- \frac{१}{४} ज्या^{\frac{\pi}{४}} स्प^{-१} \left[\frac{य-कोज्या^{\frac{\pi}{४}}}{ज्या^{\frac{\pi}{४}}} \right] \\ &= \frac{१}{४} ला \frac{य-१}{य+१} - \frac{१}{४} स्प^{-१} य = \int \frac{ताय}{य^३-१} यही उत्तर हुआ । \end{aligned}$$

(३) उदा० $\int \frac{\text{ताय}}{y^3-1}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ भी २३वें प्रक्रम से $n=6$ । $m=3$ और t के स्थान में १, २, का उत्थापन देने से क्योंकि $2=m-1$

$$\text{यौकोज्या } \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \text{ ला } (y^2 - 2\text{यकोज्या } \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1)$$

$$= \text{कोज्या } \frac{\pi}{3} \text{ ला } (y^2 - 2\text{यकोज्या } \frac{\pi}{3} + 1)$$

$$+ \text{कोज्या } \frac{2\pi}{3} \text{ ला } (y^2 - 2\text{यकोज्या } \frac{2\pi}{3} + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ला } (y^2 - y + 1) - \frac{1}{2} \text{ ला } (y^2 + y + 1)$$

$$\text{और यौज्या } \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{\sqrt{3}\pi}{6}}{\text{ज्या } \frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \right]$$

$$= \text{ज्या } \frac{\pi}{3} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{\pi}{3}}{\text{ज्या } \frac{\pi}{3}} \right] + \text{ज्या } \frac{2\pi}{3} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{2\pi}{3}}{\text{ज्या } \frac{2\pi}{3}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right]$$

इन सब का (१) में उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{y^3-1} = \frac{1}{6} \text{ ला } \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{6} \left\{ \text{ला}(y^2-y+1) - \text{ला}(y^2+y+1) \right\} \\ - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ \text{स्प}^{-1} \left[\frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right] + \text{स्प}^{-1} \left[\frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \text{ यही उत्तर हुआ ।}$$

(४) उदा० $\int \frac{\text{ताय}}{y^3-1}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २३वें प्रक्रम के (२) समीकरण से $n=3$ । $m=1$ और $t=1$ । तब

$$\int \frac{\text{ताय}}{y^{2m+1}-1} = \frac{\text{ला}(y-1)}{2m+1}$$

$$+ \frac{1}{2m+1} \text{ यौकोज्या } \frac{2t\pi}{2m+1} \text{ ला } (1 - 2\text{कोज्या } \frac{2t\pi}{2m+1} + y^2)$$

$$- \frac{2}{2m+1} \text{ यौज्या } \frac{2t\pi}{2m+1} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{2t\pi}{2m+1}}{\text{ज्या } \frac{2t\pi}{2m+1}} \right]$$

$$= \frac{\text{ला}(y-1)}{3} + \frac{1}{3} \text{ कोज्या } \frac{2\pi}{3} \text{ ला } (1 - 2\text{यकोज्या } \frac{2\pi}{3} + y^2)$$

$$- \frac{2}{3} \text{ ज्या } \frac{2\pi}{3} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{2\pi}{3}}{\text{ज्या } \frac{2\pi}{3}} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \text{ला}(\text{य}-१) - \frac{1}{6} \text{ला}(१+\text{य}+\text{य}^३) - \frac{१}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \text{ला} \frac{(\text{य}-१)^२}{\text{य}^३+\text{य}+१} - \frac{१}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}} \right]$$

(५) उदा० $\int \frac{\text{य}^{\text{ताय}}}{\text{य}^{\text{त}}-१}$ इसका मान क्या होगा।

यहाँ २४वें प्रक्रम से $m=५$ । $n=६$ $t=१, २$ । $\phi = \frac{२t\pi}{n} = \frac{२\pi}{६}, \frac{४\pi}{६}$, तब

$$\int \frac{\text{य}^{m-1}\text{ताय}}{\text{य}^n-१} = \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{n} + \frac{(-१)^m}{n} \text{ला}(\text{य}+१)$$

$$+ \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}\phi+१)$$

$$- \frac{२}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-१} \left\{ \frac{\text{य}-\text{कोज्या}\phi}{\text{ज्या}\phi} \right\}$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{६} - \frac{\text{ला}(\text{य}+१)}{६} + \frac{1}{६} \left\{ \text{कोज्या} \frac{५+२\pi}{६} \text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या} \frac{२\pi}{६}+१) \right\}$$

$$+ \frac{1}{६} \left\{ \text{कोज्या} \frac{५ \times ४\pi}{६} \text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या} \frac{४\pi}{६}+१) \right\}$$

$$- \frac{1}{३} \left\{ \text{ज्या} \frac{५ \times २\pi}{६} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या} \frac{२\pi}{६}}{\text{ज्या} \frac{२\pi}{६}} \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{३} \left\{ \text{ज्या} \frac{५ \times ४\pi}{६} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या} \frac{४\pi}{६}}{\text{ज्या} \frac{४\pi}{६}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{६} \text{ला} \frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} + \frac{1}{६} \text{ला}(\text{य}^२-\text{य}+१) - \frac{1}{६} \text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)$$

$$+ \frac{१}{२\sqrt{३}} \left\{ \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}} \right] + \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{६} \text{ला} \frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} + \frac{1}{६} \text{ला} \frac{\text{य}^२-\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१} + \frac{१}{२\sqrt{३}} \left\{ \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}} \right] + \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}} \right] \right\}$$

यही उत्तर हुआ।

(६) उदा० $\int \frac{\text{य}^{\text{ताय}}}{\text{य}^n-१}$ इसका क्या मान है।

यहाँ भी २४ वें प्रक्रम से $m=४$ । $n=५$ । $t=१, २$, $\phi = \frac{२\pi}{५}, \frac{४\pi}{५}$ इस लिये

$$\begin{aligned}
\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n - 1} &= \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला}(y - 2\text{यकोज्या} + 1) \\
&\quad - \frac{2}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \right] \\
&= \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{1}{n} \left\{ \text{कोज्या} \frac{2\pi}{n} \text{ला}(y^2 - 2\text{यकोज्या} \frac{2\pi}{n} + 1) \right. \\
&\quad \left. + \text{कोज्या} \frac{4\pi}{n} \text{ला}(y^3 - 2\text{यकोज्या} \frac{4\pi}{n} + 1) \right\} \\
&\quad - \frac{2}{n} \left\{ \text{ज्या} \frac{2\pi}{n} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} \frac{2\pi}{n}}{\text{ज्या} \frac{2\pi}{n}} \right] + \text{ज्या} \frac{4\pi}{n} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} \frac{4\pi}{n}}{\text{ज्या} \frac{4\pi}{n}} \right] \right\} \\
&= \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{1}{n} \left\{ \text{ज्या} 1^{\circ} \text{ला}(y - 2\text{यकोज्या} 0^{\circ} + 1) \right\} \\
&\quad - \frac{2}{n} \left\{ \text{कोज्या} 3^{\circ} \text{ला}(y^2 + 2\text{यज्या} 4^{\circ} + 1) \right\} \\
&\quad + \frac{2}{n} \left\{ \text{कोज्या} 1^{\circ} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} 0^{\circ}}{\text{ज्या} 0^{\circ}} \right] + \text{ज्या} 3^{\circ} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y + \text{कोज्या} 3^{\circ}}{\text{ज्या} 3^{\circ}} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{\text{ज्या} 1^{\circ}}{n} \left\{ \text{ला}(y^2 - 2\text{यकोज्या} 0^{\circ} + 1) \right\} \\
&\quad - \frac{\text{ज्या} 1^{\circ}}{n} \left\{ 2\text{कोज्या} 1^{\circ} \text{ला}(y^2 + \text{यज्या} 4^{\circ} + 1) \right\} \\
&\quad + \frac{2\text{कोज्या} 1^{\circ}}{n} \left\{ \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} 0^{\circ}}{\text{ज्या} 0^{\circ}} \right] + 2\text{ज्या} 1^{\circ} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y + \text{कोज्या} 3^{\circ}}{\text{ज्या} 3^{\circ}} \right] \right\} \\
&= \int \frac{y^m \text{ताय}}{y^n - 1} \text{ यही उत्तर हुआ ।}
\end{aligned}$$

(७) उदा० $\int \frac{y^m \text{ताय}}{y^n + 1}$ इसका क्या मान है।

यहाँ २५वें प्रकम से $n = 6$, $m = 5$, $t = 1, 3, 5$ और $\phi = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$$\begin{aligned}
\text{इस लिये } \int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} &= -\frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला}(y^2 - 2\text{यकोज्याप} + 1) \\
&\quad + \frac{2}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \right] = \int \frac{y^m \text{ताय}}{y^n + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \cos\frac{5\pi}{6} \text{ला} (y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{6} + 1) + \cos\frac{11\pi}{6} \text{ला} (y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{6} + 1) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\frac{7\pi}{6} \text{ला} (y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{6} + 1) \right\} \\
 &+ -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \cos\frac{5\pi}{6} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} \right] + \cos\frac{11\pi}{6} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \cos\frac{7\pi}{6} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ला} (y - y\sqrt{3} + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ला} (y^2 + y\sqrt{3} + 1) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{2y - \sqrt{3}}{1} \right] + \text{स्प}^{-1} y + \frac{1}{2} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{2y + \sqrt{3}}{1} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \text{स्प}^{-1} (2y - \sqrt{3}) + \text{स्प}^{-1} (2y + \sqrt{3}) \right\} \\
 &\quad + \frac{\text{स्प}^{-1} y}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{y^2 - y\sqrt{3} + 1}{y^2 + y\sqrt{3} + 1} \text{ यही उत्तर हुआ ।}
 \end{aligned}$$

(2) उदा० $\int \frac{y^3 \text{ताय}}{y^2 + 1}$ इसका क्या मान है ।

यहाँ भी २५वें प्रकम से $n = 4$ । $m = 3$ । $t = 1, 3$ । $p = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

इस लिये

$$\begin{aligned}
 \int \frac{y^3 \text{ताय}}{y^2 + 1} &= \frac{(-1)^{m-t}}{n} \text{ला} (y-1) - \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला} (y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{4} + 1) \\
 &+ \frac{1}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \left[\frac{y - \cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \right] = \int \frac{y^3 \text{ताय}}{1} \\
 &= -\frac{\text{ला} (y-1)}{4} - \frac{1}{4} \left\{ \cos\frac{\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{4} + 1) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\frac{3\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{4} + 1) \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} \left\{ \cos\frac{\pi}{4} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \right] + \cos\frac{3\pi}{4} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \right] \right\} \\
 &= -\frac{\text{ला} (y-1)}{4} + \frac{1}{4} \left\{ \cos\frac{\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{4} + 1) \right. \\
 &\quad \left. - \cos\frac{3\pi}{4} \text{ला} (y^2 + 2y\cos\frac{\pi}{4} + 1) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{5} \left\{ \text{ज्या३६}^{\circ} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{\text{यकोज्या३६}^{\circ}}{\text{ज्या३६}^{\circ}} \right] + \text{ज्या७२}^{\circ} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{\text{य} + \text{कोज्या७२}^{\circ}}{\text{ज्या७२}^{\circ}} \right] \right\} \\
& = - \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{5} \\
& + \frac{\text{कोज्या३६}^{\circ}}{5} \left\{ \text{ला}(\text{य} - २\text{यकोज्या३६}^{\circ} + १) - २\text{ज्या३६}^{\circ}\text{ला}(\text{य} + २\text{यकोज्या७२}^{\circ} + १) \right\} \\
& + \frac{२\text{ज्या३६}^{\circ}}{5} \left\{ \text{स्प}^{-1} \left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या३६}^{\circ}}{\text{ज्या३६}^{\circ}} \right] + २\text{कोज्या३६}^{\circ} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{\text{य} + \text{कोज्या७२}^{\circ}}{\text{ज्या७२}^{\circ}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

यही उत्तर हुआ ।

(९) उदा० $\int \frac{२ + \text{य}^२}{\text{य}^६ - १}$ ताय इस का क्या मान होगा ।

यहाँ २६वें प्रक्रम से $g_0 = २$ । $g_1 = ०$ । $g_2 = १$ । $f(\text{य}) = २ + \text{य}^२$ । $n = ६$
और, $t = १, २$ । $\phi = \frac{२\pi}{6}, \frac{४\pi}{6}$ इस लिये

$$\frac{f(\text{य})}{\text{य}^n - १} = \frac{f(-१)}{n} \frac{(-१)^{n-1}}{\text{य} + १} + \frac{f(१)}{n} \frac{१}{\text{य} - १}$$

$$+ \frac{2}{5} \frac{\text{यौ}(g_0 \text{कोज्या}\phi + \dots + g_{m-1} \text{कोज्या}m\phi) \text{य}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\phi + १}$$

$$- \frac{\text{यौ} \{ g_0 + g_1 \text{कोज्या}\phi + \dots + g_{m-1} \text{कोज्या}(m-१)\phi \}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\phi + १}$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{१}{\text{य} + १} + \frac{1}{3} \frac{१}{\text{य} - १} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(२\text{कोज्या}\frac{२\pi}{6} + \text{कोज्या}\frac{४\pi}{6}) \text{य} - २ - \text{कोज्या}\frac{४\pi}{6}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\frac{२\pi}{6} + १}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{(२\text{कोज्या}\frac{४\pi}{6} + \text{कोज्या}\frac{१२\pi}{6}) \text{य} - २ - \text{कोज्या}\frac{६\pi}{6}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\frac{४\pi}{6} + १}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{१}{\text{य}-१} - \frac{1}{3} \frac{१}{\text{य}+१} + \frac{1}{3} \frac{(१-१)\text{य}-२ + \frac{1}{3}}{\text{य}^२ - \text{य} + १} + \frac{1}{3} \frac{(-१+१)\text{य}-२ + \frac{1}{3}}{\text{य}^२ + \text{य} + १}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{१}{\text{य}-१} - \frac{1}{3} \frac{१}{\text{य}+१} - \frac{1}{3} \frac{१}{\text{य}^२ - \text{य} + १} - \frac{1}{3} \frac{१}{\text{य}^२ + \text{य} + १} = \frac{२ + \text{य}^२}{\text{य}^६ - १}$$

$$\text{इस लिये } \int \frac{२ + \text{य}^२}{\text{य}^६ - १} \text{ ताय} = \frac{1}{3} \text{ला} \frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} - \frac{1}{3} \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^२ - \text{य} + १} - \frac{1}{3} \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^२ + \text{य} + १}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ला} \frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} - \frac{1}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}} - \frac{1}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ला } \frac{y-1}{y+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\text{स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \text{स्प}^{-1} \frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right]$$

यही उत्तर हुआ ।

इस तरह से विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरणों के रूप के अनुसार जहाँ जिस प्रक्रम का प्रयोजन पड़े उसे अच्छी तरह से समझ कर चलराशि का मान ले आवें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

$$१। \int \frac{2y+3}{y^2+y^2-2y} \text{ ताय} = \frac{1}{6} \text{ ला } \frac{(y-1)^{10}}{y+2} - \frac{3}{2} \text{ लाय} ।$$

$$२। \int \frac{y^2-3}{y^2-9y+6} \text{ ताय} = \frac{1}{3} \text{ ला } \left\{ (y-2)^2(y+3)^2 \right\} + \text{ला} \left\{ (y-1)^2 \right\}$$

$$३। \int \frac{(2y+1)}{y(y+1)(y+2)} \text{ ताय} = \text{ला} \left\{ \frac{(y+1)\sqrt{y}}{(y+2)^{\frac{3}{2}}} \right\} ।$$

$$४। \int \frac{9y^2 \text{ ताय}}{y^2-y^2-12} = \text{ला} \left[\frac{y-2}{y+2} \right] + \sqrt{3} \text{ स्प}^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{3}} \right) ।$$

$$५। \int \frac{6 \text{ ताय}}{y^2-1} = \text{ला} \frac{(y-1)^2}{y^2+y+1} - 2\sqrt{3} \text{ स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$$

$$६। \int \frac{2y^2 \text{ ताय}}{y^2+9y+12} = y^2-18y+12 \text{ ला } (y+3) - 48 \text{ ला } (y+3) ।$$

$$७। \int \frac{2ay^2-12a^2}{y^2-a^2} \text{ ताय} = 10 \text{ स्प}^{-1} \frac{y}{a} - \text{ला} \frac{y-a}{y+a} ।$$

$$८। \int \frac{6y^2 \text{ ताय}}{y^2+y^2-2} = \text{ला} \frac{y-1}{y+1} + 2\sqrt{2} \text{ स्प}^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$९। \int \frac{(12y-6) \text{ ताय}}{y^2-y^2-2y} = 3 \text{ लाय} + 4 \text{ ला}(y-2) - 4 \text{ ला}(y+1) ।$$

$$१०। \int \frac{8 \text{ ताय}}{y(y^2+y^2+y+1)} = \text{लाय}^2 - \text{ला}(y+1)^2 - \text{ला}(y^2+1) - 2 \text{ स्प}^{-1} y ।$$

$$११। \int \frac{8 \text{ ताय}}{(y-1)^2(y^2+1)^2} = \text{ला}(y^2+1) - \text{ला}(y-1)^2 - \frac{1}{y-1} \\ - \frac{1}{y^2+1} + \text{स्प}^{-1} y ।$$

$$१२। \int \frac{१००य\ ताय}{(१ \times २य)^२(१+य+य^२+य^३)} = \frac{४०}{१+२य} - ला (१+य)^{-१०} \\ - ला(१+य^२)^{-१०} + ला (१ \times २य)^{१०} + २ स्प^{-२} य।$$

$$१३। \int \frac{४य^२\ ताय}{य^४+१} = \frac{१}{\sqrt{२}} ला \frac{य^२-य\sqrt{२+१}}{य+य\sqrt{२+१}} \\ + \sqrt{२} \left\{ स्प^{-२}(य\sqrt{२+१}) + स्प^{-२}(य\sqrt{२-१}) \right\}$$

$$१४। \int \frac{१२य^२\ ताय}{य^६+१} = ला \frac{य^२-य+१}{य^३+२य^२+१} \\ + २\sqrt{३} \left\{ स्प^{-२}(२य-\sqrt{३}) - स्प^{-२}(२य+\sqrt{३}) \right\}$$

$$१५। \int \frac{८\ ताय}{य^२+य^४-य^६-य^८} = ला \frac{१-य}{१+य} + ९ ला (१+य) - ८ लाय \\ + \frac{४}{य^२} - \frac{८}{य} + \frac{२य}{य+१} - २ स्प^{-२}य।$$

$$१६। \int \frac{य^३\ ताय}{(अ^२+गय^३)^४} = -\frac{१}{४ग(अ^२+गय^३)^३} + \frac{अ}{६ग^२(अ^२+गय^३)^३}।$$

$$१७। \int \frac{य^३\ ताय}{(१+य^३)^३} = \frac{१}{य^३+१} - \frac{१}{४(य^३+१)^२} + \frac{१}{३} ला (य^३+१)।$$

$$१८। \int \frac{(८य-२०)\ ताय}{(य+३)(य+१)^३} = \frac{१४}{य+१} + ११ ला \left[\frac{य+१}{य+३} \right]$$

$$१९। \int \frac{(अ^३-क^३)\ ताय}{ज्याय(अ+ककोज्याय)} = (अ+क)ला(ज्याय^३) - (अ-क)ला(कोज्याय^३) \\ + कला(अ+ककोज्याय)$$

यहाँ ज्याय = २ मान क्रिया करने में शीघ्र चल ज्ञान होगा ।

$$२०। \int \frac{\ ताय}{३ज्याय+ज्या२य} = लाज्या\frac{य}{३} - \frac{१}{६} लाकोज्या\frac{य}{३} + \frac{१}{३} ला(३+२कोज्याय)।$$

$$२१। \int \frac{\ तार}{(१-र^३)^{\frac{३}{२}}} = \frac{१}{३} ला(य^२+य+१) - \frac{१}{३} ला(य-१) - \frac{१}{\sqrt{३}} स्प^{-२} \left(\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right)।$$

$$\text{यदि } १-र^३ = र^३य^३।$$

$$२२। \int \frac{\ ताय}{(य+१)(३य^२+३य+१)^{\frac{३}{२}}} = \int \frac{\ तार}{(१-र^३)^{\frac{३}{२}}} \text{ यदि } र = \frac{य}{१+य}।$$

$$२३। \text{ सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो } \frac{\ फ(य)}{य^३+१}$$

$$= \frac{2}{n} \frac{y^0 \{ g_0 \text{ कोज्या}\phi + g_1 \text{ कोज्या}2\phi + \dots + g_{m-1} \text{ कोज्या}m\phi \} y}{y^2 - 2y \text{ कोज्या}\phi + 1}$$

$$\frac{y^0 \{ g_0 + g_1 \text{ कोज्या}\phi + \dots + g_{m-1} \text{ कोज्या}(m-1)\phi \}}{y^2 - 2y \text{ कोज्या}\phi + 1}$$

जहाँ $f(y) = g_0 + g_1 y = m_1 y^2 + \dots + g_{m-1} y^{m-1}$ और $m < n$

यहाँ ϕ का मान $= \frac{2\pi}{n}$ जहाँ $t = 1, 2, \dots, n-1$ है ।

२४ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{2+y^2}{1+y^2} \tan y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ला } \frac{y^2 + y\sqrt{3} + 1}{y^2 - y\sqrt{3} + 1}$$

$$+ \frac{2}{3} \{ \text{स्प}^{-1}(2y + \sqrt{3}) + \text{स्प}^{-1}(2y - \sqrt{3}) \} + \frac{1}{3} \text{स्प}^{-1}y$$

२५ । एक महाजन के प्रतिक्षण की आमदनी में, संचित धन के वर्ग में एक घटा कर जो शेष रहे उसका भाग देने से जो लब्ध हो उतनी प्रतिक्षण में उस के गुमाश्ते की आमदनी है तो बताओ जिस समय महाजन के संचित धन का प्रमाण १००००० है उस समय गुमाश्ते के धन का क्या प्रमाण होगा ।

उत्तर, गुमाश्ते को उस समय

०.०००००९९४ इतना ऋण हो गया था ।

इति द्वितीयोध्याय ।

तृतीयाध्याय ।

लघुकरणपरम्परा के विषय में ।

$$२९। कल्पना करो कि $\int \frac{ताय}{(य^२+अ^२)^न} = चन।$$$

$$\int \frac{ताय}{(य^२+अ^२)^{न-१}} = चन-१। इत्यादि मानो ।$$

और $\frac{१}{य^२+अ^२} = त$, तो खण्डचलानयन से

$$चन = \int \frac{ताय}{(य^२+अ^२)^न} = \frac{य}{(य^२+अ^२)^न} + २न \int \frac{य^२ताय}{(य^२+अ^२)^{न+१}}$$

$$\begin{aligned} \text{परन्तु } \frac{य^२ताय}{(य^२+अ^२)^{न+१}} &= \frac{(य^२+अ^२)ताय}{(य^२+अ^२)^{न+१}} - \frac{अ^२ताय}{(य^२+अ^२)^{न+१}} \\ &= \frac{ताय}{(य^२+अ^२)^न} - \frac{अ^२ताय}{(य^२+अ^२)^{न+१}} \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये } चन = \int \frac{ताय}{(य^२+अ^२)^न} = \frac{य}{(य^२+अ^२)^न}$$

$$+ २न \left\{ \int \frac{ताय}{(य^२+अ^२)^न} - अ^२ \int \frac{ताय}{(य^२+अ^२)^{न+१}} \right\}$$

$$= \frac{य}{(य^२+अ^२)^न} + २न चन - २नअ^२चन+१$$

पक्षान्तरानयन से

$$२न अ^२चन+१ = \frac{य}{(य^२+अ^२)^न} + (२न-१) चन$$

$$\text{इस लिये } चन+१ = \frac{य}{२नअ^२(य^२+अ^२)^न} + \frac{(२न-१)}{२नअ^२} चन = \frac{यत^n}{२नअ^२} + \frac{(२न-१)}{२नअ^२} चन$$

इसमें न के स्थान में न-१ का उत्थापन देने से

$$चन = \frac{यत^{न-१}}{अ^२(२न-२)} + \frac{२न-३}{अ^२(२न-२)} चन-१ \dots (१)$$

यही (१) समीकरण १८वें प्रक्रम के (१) उदाहरण के (अ) सिद्धान्त में भी सिद्ध हुआ है ।

देखो यहाँ चन का मान चन-१ के अधीन है और चन-१ का मान

(१) इसी में न के स्थान में न-१ का उत्थापन देने से

$$\frac{यत^{n-2}}{अ^2(2n-2)} + \frac{2n-4}{अ^2(2n-2)} चत_{n-2} \text{ यह होगा ।}$$

इसी प्रकार

$$चत_{n-2} = \frac{यत^{n-3}}{अ^2(2n-4)} + \frac{2n-6}{अ^2(2n-4)} चत_{n-2}$$

⋮

$$च_1 = \frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

यहाँ जिस प्रकार से चत, चत_{n-2}, चत_{n-4}, इत्यादि के मान सिद्ध हुए हैं इसे लघूकरण सिद्धान्त कहते हैं। इसके बल से अनेक चल का ज्ञान हो जाता है। इसके अनेक भेद हैं थोड़ा सा यहां प्रकाश किया जायगा। परन्तु इतना स्मरण रखना चाहिये कि लघूकरण सिद्धान्त से अन्त का चल नहीं सिद्ध होता है उस के लिये पिछले अध्यायों की क्रिया करनी पड़ेगी। जैसे इसी प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि n के स्थान में १ का उत्थापन दो तो

$$च_1 = \frac{यत^{१-१}}{अ^2(2-2)} + \frac{2-३}{अ^2(2-2)} च_0 = \infty \text{ । इस से देखो } च_1 \text{ का मान अनन्त}$$

सिद्ध होता है परन्तु पूर्व कल्पना से $च_1 = \int \frac{ताय}{य^२ + अ^२}$ और यह प्रथमाध्याय

से $\frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$ इस के तुल्य है।

इस लिये $च_1 = \frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$ इस का उत्थापन देने से

$$च_2 = \frac{तय}{२अ^२} + \frac{१}{२अ^२} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

$$च_3 = \frac{त^२य}{४अ^३} + \frac{३तय}{२ \cdot ४अ^३} + \frac{३}{२ \cdot ४अ^३} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

$$च_4 = \frac{त^३य}{६अ^४} + \frac{५त^२य}{४ \cdot ६अ^४} + \frac{५ \cdot ३तय}{२ \cdot ४ \cdot ६अ^४} + \frac{५ \cdot ३}{२ \cdot ४ \cdot ६अ^४} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

इत्यादि सिद्ध होते चले जायेंगे।

३०। यदि $च_{m,n} = \int \frac{य^m ताय}{(अ^२ + य^२)^n}$ तो खण्डचलानयन से

$$\begin{aligned}
 \text{च}_{\text{म},\text{न}} &= \int \text{य}^{\text{म}-1} \frac{\text{यताय}}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}}} = \int \text{य}^{\text{म}-2} \text{ता} - \frac{1}{2\text{न}-2} \cdot \frac{1}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}-1}} \Big\} \\
 &= -\frac{1}{2\text{न}-2} \cdot \frac{\text{य}^{\text{म}-2}}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}-1}} + \frac{\text{म}-1}{2\text{न}-2} \cdot \int \frac{\text{य}^{\text{म}-2} \text{ताय}}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}-1}} \\
 &= -\frac{1}{2\text{न}-2} \cdot \frac{\text{य}^{\text{म}-2}}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}-1}} + \frac{\text{म}-1}{2\text{न}-2} \text{च}_{\text{म}-2,\text{न}-1}
 \end{aligned}$$

इस सिद्धान्त से वार वार क्रिया करने से $\text{च}_{\text{म}-2,\text{न}-1}$ । $\text{च}_{\text{म}-4,\text{न}-2}$ । $\text{च}_{\text{म}-6,\text{न}-3}$ इत्यादि का मान जान सकते हो । अन्त में म और न के वश से $\int \frac{\text{यताय}}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}}}$ ।

इस रूप का चल जानना पड़ेगा यदि म विषम और न से इतना छोटा हो कि $\text{म}-2\text{इ}=1$ और $\text{न}-\text{इ}>1$ । अथवा यदि न से म ऐसा बड़ा हो जहाँ वार वार क्रिया करने से अन्त में $\text{न}-\text{इ}=1$, $\text{म}-2\text{इ}>1$

$$\begin{aligned}
 \text{तो अन्त के चल का रूप } &\int \frac{\text{य}^{\text{म}} \text{ताय}}{\text{अ}^2 + \text{य}^2} \text{ ऐसा होगा । इस लिये } \int \frac{\text{यताय}}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}}} \\
 &= \frac{1}{2} \int 2 \text{य ताय} (\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{-\text{न}}
 \end{aligned}$$

$= -\frac{1}{2\text{न}-2} \cdot \frac{1}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}-1}}$ यह पहली स्थिति में अन्त के चल का मान होगा । जहाँ न कोई अभिन्न संख्या है । और दूसरी स्थिति के चल का मान साधारण भाग की रीति से $\int \frac{\text{य}^{\text{म}} \text{ताय}}{\text{अ}^2 + \text{य}^2}$ इस का $\int \text{फ}(\text{य})$

$$+ \int \frac{\text{कताय}}{\text{अ}^2 + \text{य}^2} \text{ ऐसा रूप बनाकर जहाँ } \text{फ}(\text{य}) = \{ \text{ग}_{\text{न}} \text{य}^{\text{न}} + \text{ग}_{\text{न}-2} \text{य}^{\text{न}-2} + \dots \text{ग}_0 \}$$

७वें प्रक्रम से सहज में जान सकते हो ।

कभी म के सम होने पर $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}^2 + \text{य}^2)^{\text{न}}}$ ऐसा रूप भी अन्त में रहेगा जिस का चल २९वें प्रक्रम से व्यक्त हो जायगा । जैसे

$$\text{यहाँ भी यदि } \frac{1}{\text{अ}^2 + \text{य}^2} = \text{त तो}$$

$\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$, इस का मान $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$, $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$, $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$ इसके $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$, इस का मान $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$, $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$, $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$, $\int \text{य}^{\text{त}} \text{ताय}$ इस के

और $\int y^a t^b$ ताय इस का मान, $\int y^a t^b$ ताय, $\int y^a t^b$ ताय, $\int y^a t^b$ ताय,
 $\int t^b$ ताय
 इनके अधीन हैं

३१। कल्पना करो कि $t = \text{आय}^a + \text{काय}^k$ और $च_{म,न} = \int y^m t^n$ ताय
 तो $y^m t^n = y^m (\text{आय}^a + \text{काय}^k) t^{n-1} = \text{आय}^{m+a} t^{n-1}$
 $+ \text{काय}^{m+k} t^{n-1}$ चलज्ञान करने से

$$च_{म,न} = \text{आच}_{म+a,न-1} + \text{काच}_{म+k,न-1} \dots \dots \dots (१)$$

$$\begin{aligned} \text{परन्तु खण्डचलानयन से } \int y^m t^n \text{ ताय} &= \frac{y^{m+1} t^n}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int y^{m+1} \text{ता}(t^n) \\ &= \frac{y^{m+1} t^n}{m+1} - \int \frac{y^{m+1}}{m+1} n t^{n-1} (\text{आय}^{a-1} + \text{काय}^{k-1}) \text{ताय} \\ &= \frac{y^{m+1} t^n}{m+1} - \frac{n \text{अ}}{m+1} \text{आय}^{m+1} t^{n-1} \text{ताय} - \frac{n \text{क}}{m+1} \int \text{काय}^{m+k} t^{n-1} \text{ताय} \\ &= \frac{y^{m+1} t^n}{m+1} - \frac{n \text{अ}}{m+1} \text{आच}_{म+a,न-1} - \frac{n \text{क}}{m+1} \text{काच}_{म+k,न-1} \dots \dots \dots (२) \end{aligned}$$

(१) और (२) से $\text{काच}_{म+k,न-1}$ को उड़ा देने से

$$च_{म,न} = \frac{y^{m+1} t^n}{m+n \text{क} + 1} + \frac{n \text{क} - n \text{अ}}{m+n \text{क} + 1} \text{आच}_{म+a,न-1} \dots \dots \dots (३)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त हुआ यदि न धन संख्या हो तो ।

जैसे $\int y^a t^b$ ताय इस का मान जानना हो तो यहाँ इसी सिद्धान्त

$$\text{से तीन बार क्रिया करने से } \int y^{a+b} t^c \text{ ताय, } \int y^{a+b} t^c \text{ ताय}$$

इन का मान व्यक्त हो जायगा अन्त में $\int y^{a+b} t^c$ ताय यह रह जायगा ।

यदि न का मान ऋण हो तो पहले (३) से छेदगम कर, समशोध-

$$\text{नादि से } च_{म+a,न-1} = - \frac{y^{m+1} t^n}{(क-अ)n \text{अ}} + \frac{म+n \text{क} + 1}{(क-अ)n \text{अ}} च_{म,न} \text{ ऐसा}$$

समीकरण बना कर इस में म के स्थान में म-अ का और न के स्थान से -(न-१) का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = \frac{y^{म-अ+1} t^{-(न-१)}}{(क-अ)(न-१) \text{अ}} - \frac{म-अ-(न-१) \text{क} + 1}{(क-अ)(न-१) \text{अ}} च_{म-अ-(न-१)} \dots \dots (४)$$

इस पर से $\int y^{a-t} dt$ इसके मान में $\int y^{a-2t} dt$ ताय यह और इस में $\int y^{a-2t} dt$ ताय इत्यादि आवेंगे अन्त में $\int y^{a-2t} dt$ ताय यह आवेगा ।

इसी तरह (१) और (२) से यदि $च_{म,न}$ को उड़ावो तो

$$y^{m+1} t^n = (m+n+1) अच_{म+१,न-१} + (m+n+1) कच_{म+१,न-१} \dots (4)$$

इस में n के स्थान में $n+1$ का और m के स्थान में $m-अ$ का उद्घापन देने से $च_{म,न} = \frac{y^{m-अ+१} t^{n+१}}{(m+n+1) अ} - \frac{m+(n+१)क-अ+१}{(m+n+१) अ} कच_{म-अ+क,न} \dots (5)$

यह y के उत्तरोत्तर लघुघात के रूप में $च_{म,न}$ का रूप ले आता है यदि $अ > क$ हो तो ।

३२। कल्पना करो कि $t = अ + कय + गय$ तो $\int y^m t^n dt = च_{म,न}$ इसका मान जानने के लिये ३१वें प्रक्रम की युक्ति से $t^n = (अ + कय + गय)^n$ ऐसा मान और y^m से गुण कर चलानयन करने से

$$च_{म,न} = अच_{म,न-१} + कच_{म+१,न-१} + गच_{म+२,न-१} \text{ ऐसा होगा ।}$$

$$\text{इस लिये } \frac{२न}{म+१} च_{म,न} = \frac{२न}{म+१} (अच_{म,न-१} + कच_{म+१,न-१})$$

$$+ \frac{२नग}{म+१} च_{म+२,न-१} \dots \dots \dots (१)$$

और खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \frac{y^{m+१} t^n}{म+१} - \frac{नक}{म+१} च_{म+१,न-१} - \frac{२नग}{म+१} च_{म+२,न-१} \dots (२)$$

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$\frac{म+२न+१}{म+१} च_{म,न} = \frac{y^{m+१} t^n}{म+१} + \frac{२नअ}{म+१} च_{म,न-१} + \frac{नक}{म+१} च_{म+१,न-१}$$

$$\text{इस लिये } च_{म,न} = \frac{y^{m+१} t^n}{२न+म+१} + \frac{२नअ}{२न+म+१} च_{म,न-१}$$

$$+ \frac{नक}{२न+म+१} च_{म+१,न-१} \dots \dots \dots (३)$$

इसी प्रकार (१) और (२) से

$$y^{m+1}t^n = (m+1)अच_{m,n-1} + (m+n+1)कच_{m+1,n-1} \\ + (m+2n+1)गच_{m+2,n-1} \dots \dots (४)$$

(४) में म के स्थान में $m-2$ का और न के स्थान में $n+1$ का उत्थापन देने से और समशोधनादि से

$$च_{m,n} = \frac{y^{m-1}t^{n+1}}{ग(m+2n+1)} - \frac{(m+n)}{ग(m+2n+1)} च_{m-1,n} - \frac{अ(m-1)}{ग(m+2n+1)} च_{m-2,n} \dots (५)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त $च_{m,n}$ का मान जानने के लिये य के उत्तरोत्तर घात ह्रास में उत्पन्न हुआ ।

(४) में म के स्थान में $-m$ का और न के स्थान में $n+1$ का उत्थापन देने से

$$च_{-m,n} = - \frac{t^{n+1}}{अ(m-1)y^{m-1}} - \frac{क(m-n-2)}{अ(m-1)} च_{-(m-1),n} \\ - \frac{ग(m-2n-3)}{अ(m-1)} च_{-(m-2),n} \dots \dots (६)$$

यह म के ऋण मान में लघूकरणसिद्धान्त उत्पन्न हुआ ।

३३ । ३१वें प्रक्रम में यदि $t = आय^अ + कायक$ इस में $क = ०$ तो

$t = का + आय^अ$ ऐसा हुआ और (१), (२) इत्यादि समीकरण में क के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$च_{m,n} = आच_{m+अ,n-1} + काच_{m,n-1} \dots \dots (१)$$

$$च_{m,n} = \frac{y^{m+1}t^n}{m+1} - \frac{नअआ}{m+1} च_{m+अ,n-1} \dots \dots (२)$$

$$च_{m,n} = \frac{y^{m+2}t^n}{m+1} - \frac{नअआ}{m+1} च_{m+अ,n-1} \dots \dots (३)$$

$$\left. \begin{aligned} च_{m,-n} &= - \frac{y^{m-अ+1}t^{-(n-1)}}{अआ(n-1)} + \frac{म-अ+1}{अआ(n-1)} च_{m-अ,-(n-1)} \\ च_{m,n} &= + \frac{y^{m-अ+1}t^{n+1}}{अआ(n+1)} - \frac{म-अ+1}{अआ(n+1)} च_{m-अ,n+1} \end{aligned} \right\} \dots (४)$$

यदि $n = -n$

$$y^{m+1}t^n = (m+nअ+1)आच_{m+अ,n-1} + (m+1)काच_{m,n-1} \dots \dots (५)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{आ(म+nअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+nअ+१)} काच_{म-अ,न} \dots \dots \dots (६)$$

ऐसे ६ समीकरण उत्पन्न होते हैं इन पर से अनेक चलज्ञान सहज में हो जाते हैं । वे छवो समीकरण यदि वास्तव में विचारो तो ३१वें प्रक्रम के उदाहरण रूप हैं । इन पर से टाडहन्टर (Todhunter) साहब ने चलराशिकलन के ३०वें प्रक्रम में जो क्रिया की है वह भी उत्पन्न हो जाती है ।

यहां (२) से

$$च_{+अ,न-१} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{नअआ} - \frac{म+१}{नअआ} च_{म,न} \text{ इसका उत्थापन (१) में देने से}$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{नअ} - \frac{म+१}{नअ} च_{म,न} + काच_{म,न-१},$$

$$\text{इस लिये } च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+nअ+१} + \frac{कानअ}{म+nअ+१} च_{म,न-१} \dots \dots \dots (७)$$

यहां न के स्थान में न + १ का उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)} च_{म,न+१} \dots \dots \dots (८)$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो ।

३४। इस प्रक्रम में पूर्व समीकरणों की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) $य^म(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}}$ ताय इसका चल क्या है ।

यहां यदि का = ग^२, आ = -१, अ = २. न = - $\frac{१}{२}$ कल्पना करो तो ३३वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से

$$\begin{aligned} च_{म,न} &= \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{आ(म+nअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+nअ+१)} काच_{म-अ,न} \\ &= \frac{य^{म-२+१}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}+१}}{-१(म+२ \times -\frac{१}{२}+१)} - \frac{म-२+१}{-१(म+२ \times \frac{१}{२}+१)} ग^२ \int य^{म-२}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय \\ &= -\frac{य^{म-१}\sqrt{ग^२-य^२}}{म} + \frac{(म-१)ग^२}{म} \int य^{म-२}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय, ऐसा हुआ । \end{aligned}$$

खण्डचलानयन से भी

$$\int य^म(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय = -\int य^{म-१}ता (ग^२-य^२)^{+\frac{१}{२}}$$

$$\begin{aligned}
 &= -y^{m-1} \sqrt{g^2 - y^2} + (m-1) \int y^{m-2} \sqrt{g^2 - y^2} \text{ ताय} \\
 &= -y^{m-1} \sqrt{g^2 - y^2} + (m-1) \int \frac{y^{m-2} (g^2 - y^2) \text{ ताय}}{\sqrt{g^2 - y^2}} \\
 &= -y^{m-1} \sqrt{g^2 - y^2} \\
 &-(m-1) \int y^m \sqrt{2(g^2 - y^2)}^{\frac{1}{2}} \text{ ताय} + (m-1) g^2 \int \frac{y^{m-2}}{\sqrt{g^2 - y^2}} \text{ ताय}
 \end{aligned}$$

इस लिये पक्षान्तरानयन से

$$\begin{aligned}
 \int y^m (g^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{y^{m-1} \sqrt{g^2 - y^2}}{m} \\
 &+ \frac{(m-1)g^2}{m} \int y^{m-2} (g^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ ताय}
 \end{aligned}$$

इस तरह से वही सिद्ध हुआ जो पहले (६)वें समीकरण से हुआ था भेद इतनाही है कि पहले प्रकार से लाघव और दूसरे से गौरव है ।

(२) $\int \frac{\text{ताय}}{y^m (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$ इसका मान जानना है ।

यहाँ यदि $m = -m$, $n = -\frac{1}{2}$, $Aa = a^2$, $a = 0$, $ka = 1$, $k = 2$ मानो तो ३१वें प्रक्रम के ६वें समीकरण से

$$\begin{aligned}
 \text{च}_{m,n} &= \frac{y^{m-Aa+1} t^{n+1}}{(m+nA+1)Aa} - \frac{m+(n+1)k-A+1}{(m+nA+1)Aa} \text{ काच}_{m-A+k,n} \\
 &= \frac{y^{-m+1} t^{-\frac{1}{2}+1}}{(-m+1)a^2} - \frac{-m+(-\frac{1}{2}+1)2+1}{(-m+1)a^2} \text{ च}_{(-m+2,n)} \\
 &= -\frac{\sqrt{t}}{a^2(m-1)y^{m-1}} + \frac{-m+1+1}{a^2(m-1)} \int a^{-m+2} (a^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ ताय} \\
 &= -\frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{a^2(m-1)y^{m-1}} - \frac{m-2}{a^2(m-1)} \int \frac{\text{ताय}}{y^{m-2} \sqrt{a^2 + y^2}} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}
 \end{aligned}$$

इसी उदाहरण को खण्डचलानयन से भी कर सकते हो । जैसे

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\text{ताय}}{y^m \sqrt{a^2 + y^2}} &= \int \frac{1}{y^{m+1}} \text{ ता} \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y^{m+1}} + (m+1) \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y^{m+2}} \text{ ताय} \\
 &= \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y^{m+1}} + (m+1) \int \frac{a^2 + y^2}{y^{m+2} \sqrt{a^2 + y^2}} \text{ ताय}
 \end{aligned}$$

समशोधनादि से

$$a^m(m+1) \int \frac{ताय}{य^{m+2}\sqrt{अ^2+य^2}} = -\frac{\sqrt{अ^2+य^2}}{य^{m+1}} - m \int \frac{ताय}{य^m\sqrt{अ^2+य^2}}$$

म के स्थान में म-२ का उत्थापन देकर अ^२(म-१)का भाग दे देने से

$$\int \frac{ताय}{य^m\sqrt{अ^2+य^2}} = -\frac{\sqrt{अ^2+य^2}}{अ^2(म-१)य^{m-1}} - \frac{म-२}{अ^2(म-१)} \int \frac{ताय}{य^{m-2}\sqrt{अ^2+य^2}}$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

$$(३) \int \frac{य^mताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} \text{ इसका क्या मान है ।}$$

$$\text{यहाँ } \frac{य^mताय}{\sqrt{२अय-य^२}} = य^{m-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{-\frac{१}{२}} \text{ ताय, इस लिये ३३वें प्रक्रम के (८)वें}$$

समीकरण से (यदि का = २अ, आ = -१, अ = १, क = ०, म = म - $\frac{१}{२}$, न = - $\frac{१}{२}$)

$$च_{म,न} = -\frac{य^{m+१}त^{n+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)} च_{म-\frac{१}{२},न}$$

$$= -\frac{य^{m-\frac{१}{२}+१}त^{-\frac{१}{२}+१}}{२अ(-\frac{१}{२}+१)} + \frac{म-\frac{१}{२}-\frac{१}{२}+१+१}{२अ(-\frac{१}{२}+१)} च_{म-\frac{१}{२},न+१}$$

$$= -\frac{य^{m+\frac{१}{२}}त^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ} च_{म-\frac{१}{२},न+१}$$

$$= -\frac{य^{m+\frac{१}{२}}(२अ-य)^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ} \int य^{m-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{\frac{१}{२}} \text{ ताय}$$

$$= -\frac{य^m(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ} \int य^{m-१}(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} \text{ ताय यह सिद्ध हुआ ।}$$

वा ३३वें प्रक्रम के ६वें समीकरण में पूर्वोक्त संख्याओं का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = \int य^{m-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{-\frac{१}{२}} \text{ ताय}$$

$$= -\frac{य^{m-१}\sqrt{(२अय-य^२)}}{म} + \frac{अ(२म-१)}{म} \int \frac{य^{m-१}ताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} \text{ ऐसा होगा ।}$$

इसे खण्डचलानयन से भी सिद्ध कर सकते हो जैसे

$$\int \frac{य^mताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} = य^{m-१} \frac{(य-अ+अ)ताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} = \int -य^{m-१}ता\sqrt{(२अय-य^२)}$$

$$\begin{aligned}
 & + अ \int \frac{\text{ताय य}^{m-2}}{\sqrt{(2अय-य^2)}} \\
 = & - य^{m-2} \sqrt{(2अय-य^2)} + (म-१) \int य^{m-2} \sqrt{(2अय-य^2)} \text{ताय} \\
 & + अ \int \frac{\text{ताय य}^{m-2}}{\sqrt{(2अय-य^2)}} \\
 = & - य^{m-2} \sqrt{(2अय-य^2)} + (म-१) \int \frac{य^{m-2}(2अय-य^2) \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-य^2)}} \\
 & + अ \int \frac{\text{ताय य}^{m-2}}{\sqrt{(2अय-य^2)}} \\
 = & - य^{m-2} \sqrt{(2अय-य^2)} - (म-१) \int \frac{य^m \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-य^2)}} \\
 & + अ(२म-१) \frac{\text{ताय य}^{m-2}}{\sqrt{(2अय-य^2)}}
 \end{aligned}$$

पक्षान्तरानयन से और म का भाग दे देने से

$$\int \frac{य^m \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-य^2)}} = - \frac{य^{m-2} \sqrt{(2अय-य^2)}}{म} + \frac{अ(२म-१)}{म} \int \frac{य^{m-2} \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-य^2)}}$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

(४) $\int \frac{\text{ताय}}{(य^2 + अ^2)^n}$ इस का क्या मान होगा ।

यहाँ $m = 0$, $n = -n$, $आ = १$, $अ = २$, $का = अ^2$, इन का ३३वें प्रक्रम के (८)वें में उत्पादन देने से

$$\begin{aligned}
 च_{म,n} = च_{०,-n} &= - \frac{य^{m+१} \text{त}^{n+१}}{\text{काअ}(n+१)} + \frac{म + अन + अ + १}{\text{काअ}(n+१)} च_{म,n+१} \\
 &= - \frac{य^{०+१} \text{त}^{-n+१}}{२अ^2(-n+१)} + \frac{० + -२n + २ + १}{२अ^2(-n+१)} च_{०,-n+१} \\
 &= \frac{१}{(य^2 + अ^2)^{n-१}} \cdot \frac{य}{२अ^2(n-१)} + \frac{१n-३}{२अ^2(n-१)} \int \frac{\text{ताय}}{(य^2 + अ^2)^{n-१}}
 \end{aligned}$$

देखो १९वें प्रक्रम से भी यही लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है ।

इस तरह हजारों नये नये सिद्धान्त लघूकरणसिद्धान्तों के बल चलानयन के लिये बना सकते हो ।

३५ । लघूकरणसिद्धान्त के बल से त्रिकोणमिति सम्बन्धि फलों के चल का भी ज्ञान सहज में हो जाता है जैसे यदि

∫ फ(ज्याय, कोज्याय) ताय इस का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो

कि ज्याय = र . ∴ ताय = $\frac{\text{तार}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\text{तार}}{\sqrt{1-r^2}}$ क्योंकि

कोज्याय = $\sqrt{1-r^2}$ इन का उत्थापन देने से

∫ फ(ज्याय, कोज्याय)ताय = ∫ फ { र, $\sqrt{1-r^2}$ } $\frac{\text{तार}}{\sqrt{1-r^2}}$. . . (१)

यहाँ यदि फ(ज्याय, कोज्याय) = ज्यायकोज्याय तो

∫ फ(ज्याय, कोज्याय) ताय = ∫ $r^d(1-r^2)^{\frac{d}{2}(b-1)}$ तार (२)

यदि ३३वें प्रक्रम के समीकरणों में का = १, अ = -१, अ = २, म = द, और न = $\frac{३}{२}$ (ध-१) कल्पना करो तो

∫ $r^d(1-r^2)^{\frac{३}{२}(b-1)}$ तार = च_{द, $\frac{३}{२}$ (ध-१)} = च_{द, ब} यदि $\frac{३}{२}$ (ध-१) = ब

च_{द, ब} = - च_{द+२, ब-१} + च_{द, ब-१} (३)

च_{द, ब} = $\frac{r^{d+१}t^b}{d+१} + \frac{२ब}{d+१}$ च_{द+२, ब-१} (४)

च_{द, -ब} = + $\frac{r^{d-१}t^{-(b-१)}}{ब-१} - \frac{द-१}{ब-१}$ च_{द-२, -(ब-१)} (५)

च_{द, ब} = - $\frac{r^{d-१}t^{ब+१}}{२(ब+१)} + \frac{द-१}{(ब+१)}$ च_{द-२, ब+१} (६)

$r^{d+१}t^ब$ = - (द + २ब + १) च_{द+२, ब-१} + (द + १) च_{द, ब-१} (७)

च_{द, ब} = - $\frac{r^{d-१}t^{ब+१}}{द+२ब+१} + \frac{द-१}{द+२ब+१}$ च_{द-२, ब} (८)

च_{द, ब} = $\frac{r^{d+१}t^ब}{द+२ब+१} + \frac{२ब}{द+२ब+१}$ च_{द, ब-१} (९)

च_{द, ब} = - $\frac{r^{d+१}t^{ब+१}}{२(ब+१)} + \frac{द+२ब+२+१}{२(ब+१)}$ च_{द, ब+१} (१०)

च_{द, ब} = $\frac{r^{d+१}t^{ब+१}}{द+१} + \frac{द+२(ब+१)+१}{द+१}$ च_{द+२, ब} (११)

यदि ३३वें प्रक्रम के ६वें समीकरण में का, क के स्थान में आ, अ के

उत्थापन दो और आ, अ के स्थान में का, क का तो पिछला सिद्धान्त उत्पन्न होगा ।

(२) में यदि $\delta - 1 = 0$ अर्थात् $\delta = 1$ मानो तो $\beta = 0$ इनका उत्थापन (८)वें में देने से

$$\begin{aligned} \text{च}_{\delta, 0} &= \int \text{ज्या}^{\delta} \text{कोज्याय ताया} = -\frac{\text{ज्या}^{\delta-1} \text{कोज्या}^{\delta} \text{य}}{\delta + 1} + \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \text{च}_{\delta-2, 0} \\ &= \frac{\text{ज्या}^{\delta-1} \text{कोज्या}^{\delta} \text{य}}{\delta + 1} + \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \int \text{ज्या}^{\delta-2} \text{कोज्यायताया} \end{aligned}$$

इसी प्रकार $\int r^{\delta} (1-r^2)^{\frac{\delta}{2}(\delta-1)}$ तार इस में r के स्थान में इसका पहला मान ज्याय रखदो तो $\int r^{\delta} (1-r^2)^{\frac{\delta}{2}(\delta-1)}$ तार

$= \int \text{ज्या}^{\delta} \text{कोज्या}^{\delta-1} \text{कोज्यायताया}$ । अब यहाँ यदि $\delta = 0$ तो $\int \text{ज्या}^{\delta} \text{कोज्या}^{\delta-1} \text{कोज्यायताया}$
 $= \int \text{ज्या}^{\delta} \text{ताया}$ ऐसा होगा । इस लिये $\frac{\delta}{2}(\delta-1) = \beta = -\frac{\delta}{2}$ इनका उत्थापन इसी प्रक्रम के (८)वें समीकरण में देने से

$$\begin{aligned} \text{च}_{\delta, \beta} &= \frac{r^{\delta-1} t^{\beta+1}}{\delta + 2\beta + 1} + \frac{\delta - 1}{\delta + 2\beta + 1} \text{च}_{\delta-2, \beta} \\ &= \frac{\text{ज्या}^{\delta-1} \text{कोज्याय}}{\delta} + \frac{\delta - 1}{\delta} \int \text{ज्या}^{\delta-2} \text{ताया} = \int \text{ज्या}^{\delta} \text{ताया} । \end{aligned}$$

देखो ठीक यही खण्डचलानयन १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है । केवल δ के स्थान में n का उत्थापन मात्र देना होगा ।

इय तरह पीछे दिखलाये हुए समीकरणोंके बल से सैकड़ों लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हो जाते हैं विद्यार्थियों को चाहिये कि उन का अच्छी तरह से अभ्यास करें ।

३६ । ३१वें प्रक्रम की युक्ति से यदि $t = \text{आय}^{\alpha} + \text{काय}^{\kappa} + \text{गाय}^{\gamma} + \dots$ और $\text{च}_{\alpha, \kappa, \gamma, \dots} = \int \text{य}^{\alpha} \text{त}^{\alpha} \text{ताया}$ तो यहाँ भी उसी तरह से $\text{च}_{\alpha, \kappa, \gamma, \dots}$ का मान जान सकते हो । जैसे

$$t^{\alpha} = (\text{आय}^{\alpha} + \text{काय}^{\kappa} + \text{गाय}^{\gamma} + \dots) t^{\alpha-1}$$

$$\text{इस लिये, य}^{\alpha} \text{त}^{\alpha} = (\text{आय}^{\alpha+\alpha} + \text{काय}^{\alpha+\kappa} + \text{गाय}^{\alpha+\gamma} + \dots) \text{त}^{\alpha-1}$$

$$\int y^m t^n \text{ताय} = \text{आ} / y^{m+अ} t^{n-१} \text{ताय} + \text{का} / y^{m+क} t^{n-१} \text{ताय} \\ + \text{गा} / y^{m+ग} t^{n-१} \text{ताय} + \dots$$

$$\text{अर्थात् } च_{म,न} = \text{आच}_{म+अ,न-१} + \text{काच}_{म+क,न-१} + \text{गाच}_{म+ग,न-१} + \dots \quad (१)$$

और खण्डचलानयन से

$$\begin{aligned} च_{म,न} &= \int y^m t^n \text{ताय} = \frac{y^{m+१} t^n}{m+१} \\ &\quad - \frac{न y^{m+१} t^{n-१}}{m+१} (\text{अआय}^{अ-१} + \text{ककाय}^{क-१} + \text{गगाय}^{ग-१} + \dots) \text{ताय} \\ &= \frac{y^{m+१} t^n}{m+१} - \frac{नअ}{m+१} \text{आच}_{म+अ,न-१} \\ &\quad - \frac{नक}{m+१} \text{काच}_{म+क,न-१} - \frac{नग}{m+१} \text{गाच}_{म+ग,न-१} \dots \end{aligned}$$

छेदगम कर पक्षान्तरानयन से

$$y^{m+१} t^n = च_{,न}(m+१) + नअ \text{आच}_{म+अ,न-१} + नक \text{काच}_{म+क,न-१} \\ + नग \text{गाच}_{म+ग,न-१} + \dots$$

(१) से $च_{म,न}$ का उत्थापन देने से और $m+नअ+१ = अ$, $m+नक+१ = क$,
 $m+नग+१ = ग$ इत्यादि कल्पना करने से

$$y^{m-१} t^n = अ \text{आच}_{म+अ,न-१} + क \text{काच}_{म+क,न-१} + ग \text{गाच}_{म+ग,न-१} + \dots \quad (२)$$

इस तरह अनेक चमत्कार दिखा सकते हो ।

३७। लघूकरण सिद्धान्त से दो मानों के भीतर का चलज्ञान बहुत ही सहज में हो जाता है अर्थात् इस से सान्तचल मान बहुत ही सुगम हो जाता है ।

जितने पिछले प्रक्रमों में लघूकरण सिद्धान्तों के लिये समीकरणों को दिखाया है सबका मूल यदि ध्यान दे कर देखो तो खण्डचलानयन ही है इसलिये खण्ड-चलानयन को लघूकरण का मूल कह सकते हैं ।

दो सीमाओं के भीतर के चलज्ञान के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

(१) $\int (g^x - y^x)^{\frac{n}{r}} \text{ताय}$ इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int (g^x - y^x)^{\frac{n}{r}} \text{ताय} = \frac{y(g^x - y^x)^{\frac{n}{r}}}{n+१} + \frac{नग^x}{n+१} \int (g^x - y^x)^{\frac{n}{r}-१} \text{ताय}, \text{ यह एक}$$

लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ इस में यदि $y = ०$ वा $y = g$ तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^m (m-y)^n dy = \frac{m^n}{n+1} \int_0^1 (1-y)^n dy \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

(२) $\int y^{m-1}(1-y)^{n-1} dy$ ताथ इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int y^{m-1}(1-y)^{n-1} dy = -\frac{(1-y)^n}{n} y^{m-1} + \frac{m-1}{n} \int y^{m-2}(1-y)^n dy$$

ऐसा लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न होता है । यहां यदि $y = 0$ वा 1 तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1} dy = \frac{m-1}{m} \int_0^1 y^{m-2}(1-y)^n dy$$

$$\text{और } \int_0^1 y^{m-2}(1-y)^n dy = \frac{m-2}{n+1} \int_0^1 y^{m-3}(1-y)^{n+1} dy$$

$$\text{इसी तरह } \int_0^1 y^{m-3}(1-y)^{n+1} dy = \frac{m-3}{n+2} \int_0^1 y^{m-4}(1-y)^{n+2} dy$$

$$\int_0^1 y (1-y)^{n+m-3} dy = \frac{1}{n+m-2} \int_0^1 (1-y)^{n+m-3} dy$$

$$\text{और } \int (1-y)^{n+m-3} dy = -\frac{1}{n+m-1} (1-y)^{n+m-1}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^1 (1-y)^{n+m-3} dy = \frac{1}{n+m-1} \text{ इन सब का उत्थापन}$$

$$\text{देने से } \int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1} dy = \frac{(m-1)(m-2)\dots 3.2.1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)} \text{ यह होगा}$$

$$(३) \int \text{छे}^{\text{ष}} \text{ताष} = \int (1 + \text{स्प}^{\text{ष}})^2 \text{ताष} = \int (1 + 2\text{स्प}^{\text{ष}} + \text{स्प}^{\text{ष}}) \text{ताष}$$

$$= \int \text{ताष} + 2 \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताष} + \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताष} = \text{ष} + 2 \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताष} + \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताष} ।$$

$$\text{परन्तु } \int \text{स्प}^{2\text{न}} \text{ताष} = \int \text{स्प}^{2\text{न}-1} (\text{छे}^{\text{ष}} - 1) \text{ताष}$$

$$= \int \text{स्प}^{2\text{न}-1} \text{छे}^{\text{ष}} \text{ताष} - \int \text{स्प}^{2\text{न}-1} \text{ताष}$$

$$= \int \text{स्प}^{2\text{न}-1} \text{ता स्प}^{\text{ष}} - \int \text{स्प}^{2\text{न}-1} \text{ताष}$$

$$= \frac{\text{स्प}^{2\text{न}-1}}{2\text{न}-1} - \int \text{स्प}^{2\text{न}-1} \text{ताष}$$

$$= \frac{\text{स्प}^{2n-2}}{2n-1} - \frac{\text{स्प}^{2n-4}}{2n-3} + \int \text{स्प}^{2n-4} \text{ताप}$$

$$= \frac{\text{स्प}^{2n-2}}{2n-1} - \frac{\text{स्प}^{2n-4}}{2n-3} + \frac{\text{स्प}^{2n-4}}{2n-5} - \dots + \dots - (-1)^n \text{स्पप} + (-1)^n \text{प}$$

बार बार क्रिया करने से, प्रथमाध्याय का ४६वाँ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखा है उसे देखो ।

$$\text{इस पर से } \int \text{स्प}^3 \text{ताप} = 2\text{स्पप} - 2\text{प}$$

$$\int \text{स्प}^3 \text{ताप} = \frac{\text{स्प}^3 \text{प}}{3} - \frac{\text{स्पप}}{1} + \text{प}$$

इन का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \int \text{स्प}^3 \text{ताप} &= \text{प} + 2 \int \text{स्प}^3 \text{ताप} + \int \text{स्प}^3 \text{ताप} \\ &= \text{प} + 2\text{स्पप} - 2\text{प} + \frac{\text{स्प}^3 \text{प}}{3} - \text{स्पप} + \text{प} = \text{स्पप} + \frac{\text{स्प}^3 \text{प}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \text{स्प}^3 \text{ताप} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{यह सिद्ध हुआ ।}$$

$$\begin{aligned} (\text{४}) \int \text{य}^m (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} &= - \frac{\text{य}^{m-1} (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2} \\ &+ \frac{\text{अ}(2\text{म}+1)}{m+2} \int \text{य}^{m-1} (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} \end{aligned}$$

ऐसा होगा यदि ३१वें प्रक्रम में (६)वें में आ = -१, अ = २, का = २अ, क = १ और न = $\frac{1}{2}$ मानो । इस लिये यहाँ स्पष्ट है कि यदि य शून्य वा २अ के तुल्य माना जाय तो प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य होगा ।

$$\text{तब } \int_0^{2\text{अ}} \text{य}^m (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \frac{\text{अ}(2\text{म}+1)}{m+2} \int_0^{2\text{अ}} \text{य}^{m-1} \int (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय}$$

म के स्थान में म-१ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{2\text{अ}} \text{य}^{m-1} (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \frac{\text{अ}(2\text{म}-1)}{m+1} \int_0^{2\text{अ}} \text{य}^{m-2} (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय}$$

यों बार बार क्रिया करने से

$$\int_0^{2\text{अ}} \text{य}^{m-(\text{म}-1)} (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \int_0^{2\text{अ}} \text{य} (2\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= a \int_0^{2a} (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$\text{परन्तु } \int (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \int \{ a^2 - (a-y)^2 \}^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= -\frac{a-y}{2} \sqrt{2ay-y^2} - \frac{a^2}{2} \text{ज्या}^{-1} \frac{a-y}{a}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{2a} (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = +\frac{a^2\pi}{2} + \frac{a^2\pi}{2} = +\frac{a^2\pi}{2}$$

इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{2a} y^m (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{a^{m+2} (2m+1) (2m-1) (2m-3) \dots \cdot 1}{(m+2)(m+1)m(m-1)(-2) \dots \cdot 2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m+2)} \frac{\pi \cdot a^{m+2}}{2} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{1-g^2 \text{ज्या}^2 y}} \quad \text{इसका क्या मान होगा यदि } g < 1$$

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(1-g^2 \text{ज्या}^2 y)}} = \text{ताय} (1-g^2 \text{ज्या}^2 y)^{-\frac{1}{2}} \text{ इसलिये द्वियुक्पद-}$$

$$\text{सिद्धान्त से } \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(1-g^2 \text{ज्या}^2 y)}}$$

$$= \text{ताय} \left(1 + \frac{1}{2} g^2 \text{ज्या}^2 y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} g^4 \text{ज्या}^4 y + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} g^6 \text{ज्या}^6 y + \dots \right)$$

$$\text{इसलिये } \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(1-g^2 \text{ज्या}^2 y)}} = y + \frac{g^2}{2} \int \text{ज्या}^2 y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} g^4 \int \text{ज्या}^4 y + \text{ताय}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} g^6 \int \text{ज्या}^6 y + \dots$$

इस लिये १२ वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण से वा ३५ वें प्रक्रम से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(1-g^2 \text{ज्या}^2 y)}} = \frac{\pi}{2} + \frac{g^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^2 y + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} g^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^4 y + \dots$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 g^2 + \left[\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right]^2 g^4 + \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right]^2 g^6 + \dots \right\}$$

यह सिद्ध हुआ । इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि अनेक प्रश्नों का उत्तर कर पूर्व प्रक्रमों के सिद्धान्तों से अच्छी तरह परिचय करें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

$$१। \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^m \text{कोज्या}^n \text{प}} = \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{m-2} \text{पकोज्या}^n \text{प}} + \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^m \text{पकोज्या}^{n-2} \text{प}}$$

$$२। \int \frac{\text{ताष}}{\text{कोज्या}^n \text{प}} = \frac{\text{ज्याष}}{(n-1)\text{कोज्या}^{n-1} \text{प}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\text{ताष}}{\text{कोज्या}^{n-2} \text{प}}$$

$$३। \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^n \text{प}} = \frac{-\text{कोज्याप}}{(n-1)\text{ज्या}^{n-1} \text{प}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{n-2} \text{प}}$$

$$४। \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्याषकोज्या}^n \text{प}} = \frac{१}{\text{कोज्याष}} + \text{ला स्प} \frac{\text{प}}{२}$$

$$५। \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्याषकोज्या}^n \text{प}} = \int \frac{\text{ज्याषताप}}{\text{कोज्या}^n \text{प}} + \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्यापकोज्या}^n \text{प}}$$

$$६। \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^3 \text{पकोज्या}^2 \text{प}} = \frac{१}{३\text{ज्या}^3 \text{प}} - \frac{१}{\text{ज्याष}} + \text{ला} \left\{ \text{स्प} \left(\frac{\pi}{३} + \frac{\text{प}}{३} \right) \right\}$$

$$७। \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^3 \text{प}} = -\frac{\text{कोज्याप}}{२\text{ज्या}^3 \text{प}} + \text{ला} \sqrt{\text{स्प} \frac{\text{प}}{३}}$$

$$८। \int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^n \text{प}} = -\frac{१}{(n-1)\text{स्प}^{n-1} \text{प}} - \int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^{n-2} \text{प}}$$

$$९। \int \text{स्प}^n \text{ताप} = \frac{\text{स्प}^n \text{प}}{३} - \text{स्पष} + \text{प}$$

$$१०। \int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^n \text{प}} = -\frac{१}{४\text{स्प}^n \text{प}} + \frac{१}{२\text{स्प}^n \text{प}} + \text{ला} (\text{ज्याष})$$

$$११। \int \text{ज्या}^3 \text{पकोज्या}^3 \text{ताप} = -\frac{१}{४} \text{कोज्या}^4 \text{प} + \frac{१}{६} \text{कोज्या}^2 \text{प}$$

$$१२। \int \frac{\text{ज्या}^3 \text{ताप}}{\text{कोज्या}^3 \text{प}} = \frac{\text{ज्याष}}{२\text{कोज्या}^3 \text{प}} + \frac{१}{४} \text{ला} \frac{१ - \text{ज्याष}}{१ + \text{ज्याष}}$$

$$१३। \int_0^{2\pi} \text{य}^2 (२\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \frac{३३\pi\text{अ}^3}{१६}$$

$$१४। \int_0^{2\pi} \text{य}^3 (२\text{अय} - \text{य}^2)^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \frac{७\pi\text{अ}^4}{८}$$

$$१५। \int_0^{2अ} य(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}}ताय = \frac{\pi अ^३}{२}$$

१६। यदि $च_n = \int \frac{ताय}{(अ + ककोज्याय)^n}$ जहाँ n , धन और अभिन्न है तो सिद्ध करो कि

$$(n-१)(अ^२-क^२)च_n = -\frac{कज्याय}{त^{n-१}} + अ(२n-३)च_{n-१} - (n-२)च_{n-२}$$

(यहां $t = अ + ककोज्याय$)

१७। सिद्ध करो कि यदि

$$\int (१ + ककोज्याय)^{-n}ताय = च_n \text{ तो}$$

$$(n-१)(१-क^२)च_n = -कज्याय(१ + ककोज्याय)^{-n+१} + (२n-३)च_{n-१} - (n-२)च_{n-२}$$

१८। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{ताय}{(अ + ककोज्याय)^n} = २ \int \frac{(अ-ककोज्या२ष)^{n-१}ताष}{(अ^२-क^२)^{n-३}}$$

$$\text{यदि } स्प_{\frac{१}{२}} = स्पष \sqrt{\frac{अ + क}{अ-क}}$$

१९। सिद्ध करो कि यदि n सम हो तो

$$\int कोज्या^nषताष = ज्याष \left[\frac{कोज्या^{n-१}}{n} + \frac{n-१}{n(n-२)} कोज्या^{n-३}ष \right] + ज्याष \left[\frac{(n-१)(n-३)}{n(n-२)(n-४)} कोज्या^{n-५}ष + \dots \right] + \frac{(n-१)(n-३)(n-५) \dots १}{n(n-२)(n-४) \dots २} ष \text{ और यदि } n \text{ विषम हो तो}$$

$$\int कोज्या^nषताष = ज्याष \left\{ \frac{कोज्या^{n-१}}{n} + \frac{n-१}{n(n-२)} कोज्या^{n-३}ष \right\} + ज्याष \left\{ \frac{(n-१)(n-३)}{n(n-२)(n-४)} कोज्या^{n-५}ष + \dots + \frac{(n-१)(n-३)(n-५) \dots २}{n(n-२)(n-४) \dots ३} \right\}$$

२०। सिद्ध करो कि

$$\int ज्या^मषउज्या^मषताष = \frac{ज्याषउज्या^{m+१}ष}{m+२} + \frac{ष}{m+२} - \frac{m+१}{m+१} ज्याष$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m(m+1)}{2(m+1)} \left\{ \frac{\text{ज्याषकोज्याष}}{2} + \frac{प}{३} \right\} \\
& - \frac{m(m+1)(m-1)}{3(m+2)} \left\{ \frac{\text{ज्याषकोज्याष}}{3} + \frac{३\text{ज्याष}}{३} \right\} + \dots \\
& + (-1)^n \frac{(m+1)(m)\dots(m-n+2)}{n(m+1)} \int \text{कोज्या}^n \text{पताप}
\end{aligned}$$

२१। सिद्ध करो कि यदि लाय = ला और $\int \left\{ \text{लाय} \right\}^n \text{य}^m \text{ताय} = \text{चन}_{n,m}$

$$\text{तो चन}_{n,m} = \text{ला}^n \frac{\text{य}^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} \text{चन}_{n-1,m}$$

२२। सिद्ध करो कि

$$\int \text{य}^m \left\{ \text{लाय} \right\}^2 \text{ताय} = \frac{\text{य}^{m+1}}{m+1} \left\{ (\text{लाय})^2 - \frac{२}{m+1} \text{लाय} + \frac{२}{(m+1)^2} \right\}$$

२३। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
\int \left\{ \text{लाय} \right\}^3 \text{य}^m \text{ताय} &= \frac{(\text{लाय})^3 \text{य}^m}{३} - \frac{४(\text{लाय})^2 \text{य}^m}{३} + \frac{४ \cdot ३(\text{लाय}) \text{य}^m}{३} \\
&- \frac{४ \cdot ३ \cdot २ \text{लाय} \text{य}^m}{३} + \frac{४ \cdot ३ \cdot २ \text{य}^m}{३}
\end{aligned}$$

२४। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{ज्या}^m \text{य}}{\text{कोज्या}^n \text{य}} \text{ताय} = \frac{\text{ज्या}^{m-1} \text{य}}{(n-1)\text{कोज्या}^{n-1} \text{य}} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\text{ज्या}^{m-2} \text{य}}{\text{कोज्या}^{n-1} \text{य}} \text{ताय}$$

२५। सिद्ध करो कि यदि य = २ष तो

$$\int \frac{\text{ज्या}^m \text{य}}{(१ + \text{कोज्याय})^n} \text{ताय} = २^{m-n+1} \int \frac{\text{ज्या}^m \text{पताप}}{\text{कोज्या}^{2n-m} \text{य}}$$

२६। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{इ}^m \text{य}}{\text{य}^n} \text{ताय} = -\frac{\text{इ}^m \text{य}}{(n-1)\text{य}^{n-1}} + \frac{m}{n-1} \int \frac{\text{इ}^m \text{य}}{\text{य}^{n-1}} \text{ताय} ।$$

२७। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{इ}^m \text{य}}{\text{य}} \text{ताय} = \text{लाय} + \text{मय} + \frac{m^2 \text{य}^2}{२ \cdot २} + \frac{m^3 \text{य}^3}{३ \cdot ३} + \frac{m^4 \text{य}^4}{४ \cdot ४}$$

२८। $\int_0^{2\pi} \sqrt{(२अय - \text{य}^2)} \text{उज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{अ} \text{ताय} = २\pi^2$ इसे सिद्ध करो

२९ । $\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \cos^{-1} \frac{y}{a} \text{ ताय} = a^2 (\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$ इसे सिद्ध करो

३० । सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \text{स्प}^{2n+1} \text{पताष} &= \frac{\text{स्प}^{2n} \text{ष}}{2n} - \frac{\text{स्प}^{2n-2} \text{ष}}{2n-2} + \frac{\text{स्प}^{2n-4} \text{ष}}{2n-4} - \frac{\text{स्प}^{2n-6} \text{ष}}{2n-6} \\ &+ \dots + (-1)^{n+1} \text{ला} \{ \text{कोज्याष} \} \end{aligned}$$

३१ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{स्प}^n \text{ष ताष} = \frac{1}{2} \left\{ \text{ला} (2) - \frac{1}{2} \right\}$$

३२ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{उया}^2 \text{यताय}}{1 + \text{गकोज्याय}} = \frac{\text{कोज्या}^2 \text{य}}{2\text{ग}} - \frac{\text{कोज्याय}}{\text{ग}^2} - \frac{\text{ग}^2 - 1}{\text{ग}^3} \text{ला}(1 + \text{गकोज्याय})$$

३३ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^1 \text{य}^m \left\{ \text{लाय} \right\}^2 \text{ताय} = \frac{2}{(m+1)^3}$$

३४ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\text{ग}^2 \text{ज्या}^2 \text{यताय}}{1 + \text{गकोज्याय}} = (\text{ग}^2 - 1) \text{ला} (1 + \text{ग})^2 + \text{ग} (2 - \text{ग})$$

३५ । सिद्ध करो कि

$$\int (n+1) (a^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \text{ताय} = y(a^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} + n a^2 \int (a^2 + y^2)^{\frac{n}{2}-1} \text{ताय}$$

३६ । एक लड़का गङ्गाजी के किनारे अ विन्दु पर खड़ा था । उसने ठीक अपने सामने एक मनोहर फूल को जो कि धारा में बहता हुआ चला जाता था देख कर अपने स्थान से गङ्गा में कूद तैर कर फूल लेने के लिये चला । प्रतिक्षण में फूल के बहने के प्रमाण को फूल और अ विन्दु के अन्तर वर्ग से गुणने से जो गुणनफल हो उतना प्रतिक्षण में लड़के के तैरने का प्रमाण है तो बताओ कि जिस समय अ विन्दु के सामने से धारा में वह फूल ९ हाथ वह गया उस समय अ विन्दु से लड़का कितना तैर कर गया होगा । इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि अ विन्दु से धारा का अन्तर १५ हाथ है । उ० २२६८

इति तृतीयाध्याय ।

चतुर्थाध्याय ।

प्रकीर्णक ।

३८ । कल्पना करो कि

$$(१) \text{ फ(य) = य तो}$$

$$\text{फ(अ) = अ, फ(अ + च) = अ + च, फ(अ + २च) = अ + २च +}$$

इस लिये

$$\begin{aligned} & \text{च फ(अ) + च फ(अ + च) + च फ(अ + २च) + ... च फ(अ + न च)} \\ & = \text{च } \{ \text{अ + (अ + च) + (अ + २ च) + ... (अ + न च) } \} \\ & = \text{च } \{ \text{अ(न + १) + च(१ + २ + ३...न) } \} - \text{च } \{ \text{अ(न + १) + } \frac{\text{चन}}{२} \text{(न + १) } \} \\ & = \text{च(न + १) } \left(\frac{३\text{अ + नच}}{२} \right) = (\text{अ + अ + नच}) \frac{\text{च(न + १)}}{२} = \frac{\text{च(न + १)}}{२} (\text{अ + क}) \dots (१) \end{aligned}$$

यदि $\text{अ + न च} = \text{क}$ परन्तु यदि $\text{अ + नच} = \text{क}$ तो $\text{च} = \frac{\text{क-अ}}{\text{न}}$ इस का

उत्थापन देने से (१) का

$$\text{मान} = \frac{\text{क-अ}}{२} \left(१ + \frac{१}{\text{न}} \right) (\text{अ + क}) \text{ इस में यदि च} = ० \text{ वा न} = \frac{१}{१} \text{ तो}$$

$$\text{इस का मान} = \frac{\text{क}^२ - \text{अ}^२}{२} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

$$\text{परन्तु जब फ(य) = य . . . } \int \text{फ(य)ताय} = \int \text{यताय} = \frac{\text{य}^२}{२}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{फ(य)ताय} = \frac{\text{क}^२ - \text{अ}^२}{२} \quad (२) \text{ प्रक्रम देखो}$$

$$(२) \text{ फ(य) = य}^२ \quad \text{तो}$$

$$\begin{aligned} & \text{च फ(अ) + च फ(अ + च) + च फ(अ + २च) + \dots \text{च फ(अ + नच)} \\ & = \text{च अ}^२ + \text{च (अ + च)}^२ + \dots \text{च (अ + नच)}^२ \\ & = \text{च } \{ \text{अ}^२ + (\text{अ}^२ + २ \text{अच} + \text{च}^२) + \dots (\text{अ}^२ + २ \text{अनच} + \text{न}^२ \text{च}^२) \} \\ & = \text{च } \{ \text{अ}^२(\text{न + १}) + २ \text{अच}(१ + २ + ३ + \dots \text{न}) + \text{च}^२ (१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + \text{न}^२) \} \\ & = \text{च } \left\{ \text{अ}^२(\text{न + १}) + \text{अचन}(\text{न + १}) + \frac{\text{च}^२ \text{न}(\text{न + १})}{२} \cdot \frac{(२\text{न + १})}{३} \right\} \\ & = \text{च (न + १) } \left\{ \text{अ}^२ + \text{अचन} + \text{च}^२ \text{न} \frac{२\text{न + १}}{६} \right\} \\ & = (\text{क-अ}) \left(१ + \frac{१}{\text{न}} \right) \left\{ \text{अ}^२ + \text{कअ} - \text{अ}^२ + (\text{क-अ}) \left(\frac{\text{क-अ}}{\text{न}} \right) \left(\frac{३\text{न + १}}{६} \right) \right\} \\ & = (\text{क-अ}) \left(१ + \frac{१}{\text{न}} \right) \left\{ \text{कअ} + (\text{क + अ})^२ \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{६\text{न}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= (क-अ) \left\{ कअ + \frac{(क-अ)^2}{३} \right\} = (क-अ) \left[\frac{क^२ + कअ + अ^२}{३} \right] = \frac{क^३ - अ^३}{३}$$

$$\text{परन्तु फ(य) = य}^२ \therefore \int \text{फ(य) ताय} = \int \text{य}^२ \text{ताय} = \frac{\text{य}^३}{३}$$

इस लिये $\int_{अ}^{क} \text{फ(य) ताय} = \frac{क^३ - अ^३}{३}$, इस तरह से (२) प्रक्रम की परिभाषा

से स्वतन्त्रराशि के दो मानों के भीतर का चलानयन बीजगणित की युक्ति से श्रेढियों के योग पर से कर सकते हैं। परन्तु जहाँ श्रेढियों के योग करने की रीति नहीं जानी जाती वहाँ इस रीति से सान्तचल का मान जानना कठिन है।

जैसे यदि फ(य) = लाय तो

$$\begin{aligned} & चफ(अ) + चफ(अ + च) + चफ(अ + २च) + चफ(अ + ३च) + \dots \\ & + चफ \{ अ + च(न-१) \} = च[ला(अ) + ला(अ + च) + ला(अ + २च) \\ & + ला(अ + ३च) + \dots + ला \{ अ + च(न-१) \}] \end{aligned}$$

यहाँ हम लोग अब लाचार हैं कि कैसे इस श्रेढी का योग करें परन्तु जब (२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि इस श्रेढी का योग अवश्य

$$\int_{अ}^{क} \text{फ(य)ताय} = \int_{अ}^{क} ला (य) ताय यह होगा। इसलिये ऐसे ऐसे स्थानों में$$

सान्तचलानयन से श्रेढी के योग का पता लग सकता है।

जैसे इसी स्थान में जब प्रसिद्ध है कि $\int लायताय = य लाय - य$ तब

$$\int_{अ}^{क} लायताय = ला \left[\frac{क^क}{अ^अ} \right] - (क-अ) यही ऊपर के श्रेढी का योग होगा।$$

३९। इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रम को अच्छी तरह से समझने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

$$(१) \frac{१}{\sqrt{१-य^२}} = \text{फ(य)} \text{ इस में श्रेढी के योग पर से } \int_०^१ \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-य^२}}$$

इसका मान जानना है यहाँ, चफ(०) + चफ(च) + चफ(२च) + चफ(३च) + ... + चफ(१)

$$= \left[\frac{च}{१} + \frac{च}{\sqrt{१-च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१-४च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१-९च^२}} + \dots + \frac{च}{\sqrt{१-१^२}} \right]$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-4}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-9}} + \dots$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-9}} + \dots \text{ क्योंकि यहाँ}$$

$$n\text{च}=\frac{1}{n} \therefore \text{च}=\frac{1}{n} \text{ परंतु चलब्रान से } \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{\sqrt{1-\text{य}^2}} = \frac{\pi}{2}$$

इस लिये यदि n का मान अनन्त हो तो

$$\int_0^1 \frac{\text{ताय}}{\sqrt{1-\text{य}^2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-9}} + \dots \text{ यह सिद्ध हुआ}$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}^2} \text{ इसका मान श्रेढी में जानना है ।}$$

(2) प्रक्रम से

$$\int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}^2} = \frac{\text{च}}{1} + \frac{\text{च}}{1+\text{च}^2} + \frac{\text{च}}{1+4\text{च}^2} + \frac{\text{च}}{1+9\text{च}^2} + \dots + \frac{\text{च}}{1+\text{च}^2}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \dots \right\}$$

$$\text{परन्तु चलानयन के प्रकार से } \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}^2} = \frac{\pi}{4}, \text{ इस लिये यदि ऊपर की}$$

श्रेढी में n अनन्त हो तो श्रेढी का योग $\frac{\pi}{4}$ होगा ।

$$(3) \text{च}[\text{ज्याअ} + \text{ज्या(अ+च)} + \text{ज्या(अ+२च)} + \dots + \text{ज्या}\{ \text{अ} + (n-1)\text{च} \}]$$

इस में यदि n का मान अनन्त हो तो श्रेढी के योग का मान जानना है ।

यहाँ चिकोणमिति की रीति से ऊपर की श्रेढी का योग

$$= \frac{\text{चज्या}\left(\text{अ} + \frac{n-1}{2}\text{च}\right)\text{ज्या}\frac{n\text{च}}{2}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{2}} = \frac{\text{चज्या}\left(\text{अ} + \frac{\text{क}-\text{अ}}{2} - \frac{\text{च}}{2}\right)\text{ज्या}\frac{\text{क}-\text{अ}}{2}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{2}}, \text{ यदि } \text{अ} + n\text{च} = \text{क}$$

$$\text{अब यहाँ यदि } \text{च} = 0 \text{ तो } \frac{\text{च}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{2}} = 2 \frac{\text{च}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{2}} = 2 \text{ इस लिये श्रेढी का योग}$$

$$2\text{ज्या}\frac{\text{क}+\text{अ}}{2} \text{ ज्या}\frac{\text{क}-\text{अ}}{2} = \text{कोज्याअ} - \text{कोज्याक} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{ज्यायताय यह सिद्ध हुआ ।}$$

इसी श्रेढी में यदि n के स्थान में $n+1$ का उत्पादन दें तो श्रेढी का योग

$$= \text{चज्या}\left(\text{अ} + \frac{\text{नच}}{\text{र}}\right)\text{ज्या}\frac{\text{न+१}}{\text{र}}\text{च} - \text{ज्या}\frac{\text{च}}{\text{र}} = \frac{\text{रच}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{\text{र}}}\text{ज्या}\left(\text{अ} + \frac{\text{क-अ}}{\text{र}}\right)\text{ज्या}\left[\frac{\text{क-अ}}{\text{र}} + \frac{\text{च}}{\text{र}}\right]$$

$$= \text{रज्या}\left(\frac{\text{क+अ}}{\text{र}}\right)\text{ज्या}\frac{\text{क-अ}}{\text{र}} = \text{कोज्याअ—कोज्याक, यदि च} = 0$$

इसलिये श्रेढी में यदि एक पद बढ़ भी जाय तौ भी योग वही रहेगा ।

४० । २ प्रक्रम से और ३९ प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय यह च}_1\text{फ(अ)} + \text{च}_2\text{फ(य}_1) + \dots + \text{च}_n\text{फ(य}_{n-1}) \text{ इस श्रेढी}$$

के योग तुल्य है यदि श्रेढी में न का मान अनन्त कल्पना किया जाय

जहाँ $\text{च}_1 = \text{य}_1 - \text{अ}_1 = 0$, $\text{च}_2 = \text{य}_2 - \text{य}_1 = 0$, ... और $\text{य}_{n-1} = \text{क} - \text{च}_n$

मानो कि अ, क के भीतर फ(य) के जितने मान हैं वे सब उत्तरोत्तर घटते वा बढ़ते हैं और उन में सब से बड़ा आ और सब से छोटा का है तो सब फलों के स्थान में आ और का का उत्पादन देने से आ (च₁ + च₂ + च₃ + ... + च_n) यह पहली श्रेढी से बड़ा होगा और का (च₁ + च₂ + च₃ + ... + च_n) यह छोटा । परन्तु च₁ + च₂ + ... + च_n = क—अ इस लिये ऊपर के श्रेढी का मान आ (क—अ) और का (क—अ) के बीच में होगा ।

इस लिये निश्चय है कि श्रेढी का मान (क—अ)गा इसके तुल्य होगा

जहाँ गा एक ऐसी संख्या है जिसका मान आ और का के बीच में है परन्तु फ(य) को घटते वा बढ़ते माना है इस लिये अवश्य कोई य के मान में यह गा के तुल्य होगा । मानो कि गा = फ { अ + ष(क—अ) } जहाँ ष कोई रूपाल्प संख्या है ।

$$\text{इस लिये श्रेढी का योग} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय} = (\text{क} - \text{अ}) \text{फ} \{ \text{अ} + \text{ष}(\text{क} - \text{अ}) \}$$

इसी प्रकार फ(य) फा(य)ताय इसमें फ(य) तो पहले ही के ऐसा समझो और वैसाही फा(य) को भी समझो तो पूर्व ही की रीति से

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)फा(य)ताय} = \text{च}_1\text{फ(अ)फा(अ)} + \text{च}_2\text{फ(य}_1) \text{फा(य}_1) + \dots +$$

$$\text{च}_n\text{फ(य}_{n-1})\text{फा(य}_{n-1}).$$

यहां भी पूर्व ही की रीति से सिद्ध कर सकते हो कि यह श्रेढी

आ { च₁फा(अ) + च₂फा(य₁) + च₃फा(य₂) + ... + च_nफा(य_{n-1}) } इससे छोटी और का { च₁फा(अ) + च₂फा(य₁) + च₃फा(य₂) + ... च_nफा(य_{n-1}) } इस से बड़ी होगी ।

$$\begin{aligned}
 & \text{इस लिये यहां भी मानो कि फ(य) के गा मान में वास्तव श्रेढी का} \\
 \text{योग} &= \text{गा} \{ \text{च}_1\text{फा(अ)} + \text{च}_2\text{फा(य}_1) + \text{च}_3\text{फा(य}_2) + \dots + \text{च}_n\text{फा(य}_{n-1}) \} \\
 &= \text{गा} \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फा(य)ताय} = \text{फ} \{ \text{अ} + \text{ष(क—अ)} \} \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फा(य) ताय} \\
 &= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)फा(य)ताय यह सिद्ध होता है ।}
 \end{aligned}$$

यहां इसका कुछ नियम नहीं कि $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय}$ इसके मान में जो

$\text{फ} \{ \text{अ} + \text{ष(क—अ)} \}$ इसमें ष है वही $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)फा(य)ताय}$ इसके मान में भी हो इतना अवश्य नियम है कि ऐसे स्थानों में ष सर्वत्र रूपाल्प संख्या है ।

४१ । सान्तचलानयन से स्पष्ट है कि यदि $\int \text{फ(य)ताय} = \text{फा(य)}$ तो

$$\int_{\text{अ}}^{\text{ग}} \text{फ(य)ताय} = \text{फा(ग)} - \text{फा(अ)}$$

$$\int_{\text{ग}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय} = \text{फा(क)} - \text{फा(ग)}$$

$$\text{इस लिये } \int_{\text{अ}}^{\text{ग}} \text{फ(य)ताय} + \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय} = \text{फा(क)}$$

$$- \text{फा(अ)} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय}, \quad \dots \dots \dots (१)$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध कर सकते हो कि

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय} = - \int_{\text{क}}^{\text{अ}} \text{फ(य)ताय} \quad \dots \dots \dots (२)$$

यदि $\int \text{फ(य)ताय}$ इस में य के स्थान में अ—ल इस का उत्थापन दें तो $\text{अ—ल} = \text{य}$. $\text{अ—य} = \text{ल}$, $—ताय = \text{ताल}$,

$$\text{इस लिये } \int \text{फ(अ—य)ताय} = - \int \text{फ(ल)ताल}$$

$$\text{और } \int_{\text{अ}}^{\text{क}} (\text{अ—य}) ताय = - \int_{\text{अ—क}}^{\text{अ—अ}} \text{फ(ल)ताल} = \int_{\text{अ—क}}^{\text{अ—अ}} \text{फ(ल)ताल}, \quad (२) \text{ से}$$

मानो कि $\int \text{फ(ल)ताल} = \text{फा(ल)}$ इस लिये

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(ल)ताल} = \text{फा(क)} - \text{फा(अ)} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय}$$

$$\text{इस लिये } \int_{\text{अ}}^{\text{क}} (\text{अ—य})ताय = \int_{\text{अ—क}}^{\text{अ—अ}} \text{फ(य)ताय} \quad \dots \dots \dots (३)$$

(३) में मानो कि $\text{क} = ०$ तो $\int_{\text{अ}}^{\text{अ—क}} \text{फ(अ—य)} = \int_{\text{अ}}^{\text{अ—अ}} \text{फ(य)ताय}$

$$\text{इस लिये (२) से } \int_{\text{अ—क}}^{\text{अ—अ}} \text{फ(अ—य)ताय} = \int_{\text{अ—क}}^{\text{अ—अ}} \text{फ(य)ताय} \quad \dots \dots \dots (४)$$

इसी प्रकार यदि $y = 2a - r$ तो $ताय = -तार$ और $r = 2a - y$

इस लिये $\int f(y) ताय = - \int f(2a - r) तार$

और $\int_a^{2a} f(y) ताय = - \int_a^0 f(2a - r) तार = \int_0^a f(2a - r) तार$

परन्तु (३) की युक्ति से $\int_0^a f(2a - r) तार = \int_0^a f(2a - y) ताय$

इस लिये $\int_a^{2a} f(y) ताय = \int_0^a f(2a - y) ताय$

और (१) से $\int_0^{2a} f(y) ताय = \int_0^a f(y) ताय + \int_a^{2a} f(y) ताय$

इस लिये $\int_0^{2a} f(y) ताय = \int_0^a f(y) ताय + \int_0^a f(2a - y) \dots \dots (५)$

(५) वें में यदि y के ० और a के बीच सब मानों में $f(y) = f(2a - y)$

तो $\int_0^{2a} f(y) ताय = 2 \int_0^a f(y) ताय \dots \dots \dots (६)$

और यदि y के ० और a के बीच सब मानों में $-f(y) = f(2a - y)$

तो $\int_0^{2a} f(y) ताय = 0 \dots \dots \dots (७)$

जैसे यदि $f(y) = ज्या^m y$ तो $f(\pi - y) = ज्या^m(\pi - y) = ज्या^m y$
त्रिकोणमिति से

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \int_0^{2\pi} f(y) ताय &= \int_0^{\pi} f(y) ताय + \int_{\pi}^{2\pi} f(y) ताय \\ &= 2 \int_0^{\pi} ज्या^m y ताय = \int_0^{\pi} ज्या^m y ताय \dots \dots \dots (६) \text{ से} \end{aligned}$$

और जब त्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि $कोज्या y = -कोज्या(\pi - y)$

इस लिये यदि m विषम संख्या हो और $f(y) = कोज्या^m y$ तो (७) से

सिद्ध कर सकते हो कि $\int_0^{2\pi} फ(y) ताय = \int_0^{\pi} कोज्या^m y ताय = 0$

(२) प्रक्रम से यदि $\int_0^{\pi} ज्या^m y ताय$ इसका मान श्रेणी में लावो तो

$\{ ज्या^m च + ज्या^m २च + ज्या^m ३च + \dots + ज्या^m (n-१)च \}$ ऐसा होगा
जहाँ $nच = \pi$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि $ज्या^m च = ज्या^m (n-१)च = ज्या^m (\pi - च) = ज्या^m च,$

$\int_0^{\pi} \cos^m x = \int_0^{\pi} \cos^m(\pi - x) = \int_0^{\pi} \cos^m x$, इसी तरह और भी दिखा सकते हो कि दो दो पद तुल्य आवेंगे इस लिये इस पर से भी सिद्ध

कर सकते हो कि $\int_0^{\pi} \cos^m x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x$ ।

इसी तरह से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि $\int_0^{\pi} \sin^m x = 0$

यदि m विषम हो

यदि a से b बड़ा हो और y के a और b के बीच किसी मान में $f(y)$ सर्वदा धनात्मक हो तो स्पष्ट है कि $\int_a^b f(y) dy$ इसका मान जो (2) प्रक्रम से श्रेणी में आता है उस में प्रत्येक पद धनात्मक ही रहेंगे इस लिये श्रेणी का योग अर्थात् $\int_a^b f(y) dy$ यह सर्वदा धनात्मक ही होगा ।

४२। ऊपर के प्रक्रमों में सान्तचल के लिये जो कुछ वर्णन किया गया है वह सब तभी ठीक दिखा सकते हो जब फल अर्थात् जिस का चल ज्ञान करना है, a और b के बीच स्वतन्त्र राशि के मानों में सान्त हो और यदि a , और b के बीच किसी स्वतन्त्र राशि के मान में फल अनन्त के तुल्य हो तो ऊपर की विधि से अर्थात् श्रेणी की विधि से सिद्ध होता है कि सान्तचल ज्ञान नहीं हो सकता । ऐसी स्थिति में अवश्य परीक्षा करनी चाहिये ।

जैसे चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{1}{(1-y)^2} = \frac{1}{1-y}$ इस लिये

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-y)^2} = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} = -1 - 1 = -2 \text{ यह मान आया}$$

परन्तु $\int_0^2 \frac{1}{(1-y)^2}$ इस का मान यदि (2) प्रक्रम से श्रेणी में ले आवो

तो च $\left\{ \frac{1}{(1-0)^2} + \frac{1}{(1-1)^2} + \dots \right\}$ ऐसा होगा ।

इस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धनात्मक है इस लिये श्रेणी का योग

अर्थात् $\int_0^2 \frac{1}{(1-y)^2}$ यह धनात्मक ही होगा । इस कारण पहले सान्तचलानयन से -2 यह मान सिद्ध हुआ अशुद्ध ठहरा । यहां 0 और 2 के बीच

y का मान 1 के तुल्य मानो तो $\frac{1}{1-y^2}$ यह अनन्त के तुल्य होता है ।

इसी प्रकार $\int_0^a \frac{ताय}{\sqrt{१-य}} = २-२\sqrt{१-अ}$ यह सान्तचलानयन से

सिद्ध होता है परन्तु यहां यदि $य = १$ तो $\frac{१}{\sqrt{१-य}}$ यह अनन्त के तुल्य

होता है। इस लिये यहां ऐसा कहना पड़ेगा कि $\int_0^a \frac{ताय}{\sqrt{१-य}}$ इसका

मान सान्त होगा यदि $अ < १$ हो तो। और $अ$ का मान जैसा जैसा १ के

पास होता जायगा तैसा तैसा $\int_0^a \frac{ताय}{\sqrt{१-य}}$ यह २ के पास पास आवेगा।

४३। (२) प्रक्रम में $\int_0^क फ(य)ताय$ इस के मान में $क$, और $अ$ दोनों

को जो $फ(य)$ के ऐसा सान्त कल्पना किया है वह सर्वदा ठीक नहीं कभी एक कभी दोनों विशेष स्थल में अनन्त के भी समान हो सकते हैं।

जैसे $\int \frac{ताय}{१+य^२} = स्प^{-१}य$ इस लिये $\int_0^अ \frac{ताय}{१+य^२} = स्प^{-१}अ$ यहां स्पष्ट है

कि ज्यों ज्यों $अ$ का मान बढ़ता जायगा त्यों त्यों $स्प^{-१}अ$ का मान $\frac{\pi}{३}$ के पास पास होगा इस लिये यदि $अ = \infty$ तो $स्प^{-१}अ = \frac{\pi}{३}$ ऐसा

होगा इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{३}$ यह सिद्ध हुआ।

इसी प्रकार $\int \frac{ताय}{१+य} = ला (१+य)$

इस लिये $\int_0^अ \frac{ताय}{१+य} = ला (१+अ)$ यहां भी स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों $अ$ का

मान बढ़ेगा त्यों त्यों $ला (१+अ)$ का भी मान बढ़ेगा इस लिये यदि

$अ = \infty$ तो $ला (१+अ) = \infty$, $\therefore \int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य} = \infty$ यह सिद्ध होता है।

४४। कल्पना करो कि $फ(य)$ का मान अनन्त होता है यदि $य = ग$ जहां $ग$, $अ$ और $क$ के बीच में है तो (४२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि यहां

$\int_0^क फ(य) ताय$ इसका मान साधारण सान्त चलानयन से ठीक नहीं

अ

आवेगा इस लिये पहले यहां $\int_{अ}^{ग-इ_१} फ(य)ताय + \int_{ग+इ_१}^{क} फ(य)ताय$

इस का मान ले आवो इस में $इ_१$ का मान शून्य मानने से (४१) प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = \int_{अ}^{ग-इ_१} फ(य)ताय + \int_{ग+इ_१}^{क} फ(य)ताय$$

यह सिद्ध हो जायगा ।

जैसे यदि $फ(य) = \frac{१}{ग-य}$ तो $\int फ(य)ताय = -ला (ग-य)$

$$\text{इस लिये } \int_{अ}^{ग-इ_१} फ(य)ताय = -ला \{ ग-(ग-इ_१) \}$$

$$- \{ -ला (ग-अ) \} = ला \frac{ग-अ}{इ_१}$$

$$\text{इसी तरह } \int_{ग+इ_१}^{क} फ(य)ताय = \int_{ग+इ_१}^{क} \frac{ताय}{ग-य} = - \int_{ग+इ_१}^{क} \frac{क-ताय}{य-ग}$$

$$= - \int ला \frac{क-ग}{इ_१} \text{ इस लिये दोनों का योग } = ला \frac{ग-अ}{इ_१} - ला \frac{क-ग}{इ_१}$$

$$= ला \frac{ग-अ}{क-ग} = \int_{अ}^{क} \frac{ताय}{ग-य} \text{ क्योंकि यहाँ } इ_१ = ० \text{ मानने से भी } ला \frac{ग-अ}{क-ग}$$

में कुछ विकार न होगा ।

ऐसे मान को क्वासी (Cauchy) साहब ने $\int_{अ}^{क} फ(य)ताय$ इसका मुख्य मान यह नाम रखा है ।

$$४५। \int \frac{ताय}{अ^२+य^२} \text{ इस का मान सिद्ध है कि } \frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ} \text{ यह होगा}$$

इस लिये \int यहां यदि $य = स्पष$ तो $ताय = छे^षताष$ तब

$$\int \frac{ताय}{अ^२+य^२} = \int \frac{छे^षताष}{अ^२+स्प^२ष} = \frac{१}{अ} स्प^{-१} \left[\frac{स्पष}{अ} \right]$$

यहां यदि $ष = ०$ और π हो तो $\int_०^{\pi} \frac{छे^षताष}{अ^२+स्प^२ष}$ इस का मान

$$\frac{१}{अ} स्प^{-१} \left(\frac{स्प\pi}{अ} \right) - \frac{१}{अ} स्प^{-१} \left(\frac{स्प०}{अ} \right) = स्प^{-१}(०) - स्प^{-१}(०)$$

देखो यहाँ दोनों खण्डों का रूप एक ही है इस लिये बहुधा भ्रान्ति से जो लोग कि सान्तचलानयन में निपुण नहीं हैं दोनों मानों को समान मान उत्तर शून्य के तुल्य कहेंगे जो कि वास्तव में अशुद्ध है क्योंकि यदि सान्तचल का रूप (२) प्रक्रम से श्रेणी में ले आवो तो

$$\frac{च}{अ} + \frac{चछेच}{अ^२ + स्प^२च} + \frac{चछे^२च}{अ^३ + स्प^२च} + \dots + \frac{चछे^{(न-१)च}}{अ^n + स्प^{(न-१)च}}$$

यह होगा जिस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धन हैं इस लिये श्रेणी का योग अर्थात् $\int_0^{\pi} \frac{छे^{\phi} रता\phi}{अ^२ + स्प^२\phi}$ यह कोई धनात्मक संख्या है। यही ४१वें प्रक्रम के अन्त्य वाक्य से भी सिद्ध कर सकते हो कि यहाँ सान्तचल का मान अवश्य धनात्मक संख्या होगी।

इस लिये यहाँ पर विचार करना चाहिये कि वास्तव में ϕ के ० और π मान में $स्प^{-१} \left(\frac{स्प\phi}{अ} \right)$ का क्या मान होगा। कल्पना करो कि ०, $\phi_१$, $\phi_२$, $\phi_३$, \dots , ϕ_n , π यह एक श्रेणी है जहाँ उत्तरोत्तर अधिक पद हैं और

$$\frac{छे^{\phi}}{अ^२ + स्प^२\phi} = र \quad \text{तो (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{छे^{\phi} रता\phi}{अ^२ + स्प^२\phi} = \int_0^{\pi} रता\phi = \int_{\phi_१}^{\phi_२} रता\phi + \int_{\phi_२}^{\phi_३} रता\phi + \int_{\phi_३}^{\phi_४} रता\phi + \dots$$

$$+ \int_{\phi_{n-१}}^{\phi_n} रता\phi + \int_{\phi_n}^{\pi} रता\phi$$

यहाँ स्पष्ट है कि n का मान अधिक करने से ϕ_n और $\phi_{n+१}$ के अन्तर को चाहे जितना छोटा कर सकते हो इस लिये

$$\int_{\phi_n}^{\phi_{n+१}} रता\phi = स्प^{-१} \left[\frac{स्प\phi_{n+१}}{अ} \right] - स्प^{-१} \left[\frac{स्प\phi_n}{अ} \right] \text{ यह अवश्य शून्य}$$

के तुल्य हो सकता है यदि $\phi_{n+१} - \phi_n = ०$

इस पर से सिद्ध होता है कि ज्यों ज्यों ϕ का मान बढ़ेगा त्यों त्यों $स्प^{-१} \left(\frac{स्प\phi}{अ} \right)$ इस का भी मान बढ़ता जायगा इस लिये ϕ के ० मान से π मान तक एक बार यह भी बढ़ कर $\frac{n\pi}{२}$ इस मान के पार हो जायगा। जहाँ n कोई विषम संख्या है इस लिये यदि ϕ के शून्य मान में

$\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान $n\pi$ मानो तो ϕ के π मान में $\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान $(n+1)\pi$ अवश्य मानना पड़ेगा इस लिये

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\text{छेषताष}}{\text{अ}^2 + \text{स्प}^2\phi} \\ &= \frac{1}{\text{अ}} \left\{ \text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{स्प}\pi}{\text{अ}}\right] - \text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{स्प}0}{\text{अ}}\right] \right\} = \frac{1}{\text{अ}} \left\{ \text{स्प}^{-1}(0) - \text{स्प}^{-1}(0) \right\} \\ &= \frac{1}{\text{अ}} \left\{ (n+1)\pi - n\pi \right\} = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ यह सच्चा उत्तर होगा ।} \end{aligned}$$

अथवा $\frac{1}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ इस में मानो कि $\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right) = \phi$

∴ स्पषा = $\frac{1}{\text{अ}} \text{स्पष}$ अब चलनकलन के (३०४) प्रक्रम के (१) समीकरण से

यदि $m = n = \frac{1}{\text{अ}}$ और $m = \frac{\text{अ}-1}{\text{अ}+1}$ तो

$\phi = \phi - m \text{ज्या} 2\phi + \frac{m^2}{2} \text{ज्या} 4\phi - \frac{m^3}{3} \text{ज्या} 6\phi + \dots$ ऐसा होगा

इस का उत्पादन चल मान में देने से

$$\int \frac{\text{छेषताष}}{\text{अ}^2 + \text{स्प}^2\phi} = \frac{1}{\text{अ}} \left(\phi - m \text{ज्या} 2\phi + \frac{m^2}{2} \text{ज्या} 4\phi - \frac{m^3}{3} \text{ज्या} 6\phi + \dots \right) \text{ ऐसा हुआ}$$

इस में ϕ का मान शून्य और π मानो तो स्पष्ट है कि

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\text{अ}} \frac{\text{छेषताष}}{\text{अ}^2 + \text{स्प}^2\phi} &= \frac{1}{\text{अ}} \left(\pi - m \text{ज्या} 2\pi + \frac{m^2}{2} \text{ज्या} 4\pi - \frac{m^3}{3} \text{ज्या} 6\pi + \dots \right) \\ &= \frac{1}{\text{अ}} \left(0 - m \text{ज्या} 0 + \frac{m^2}{2} \text{ज्या} 0 - \frac{m^3}{3} \text{ज्या} 0 + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{\text{अ}} - 0 = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ यह बड़े लाघव से सिद्ध हुआ ।} \end{aligned}$$

पहली क्रिया जो दिखलाई गई है उसे टाडहण्टर (Todhunter) साहब ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) के ४६वें प्रक्रम में लिखा है ।

और दूसरी क्रिया से $\frac{1}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान जो दिखलाया है वह मेरी कल्पना है ।

इसी प्रकार दोनों सीमाओं के भीतर वास्तव में क्या मान है इसकी परीक्षा के लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि बड़ी सावधानी से क्रिया करें क्योंकि ऐसे स्थानों में बहुधा संशयात्मक मान पड़ जाते हैं जिनका ठीक विचार न करने से

तुरन्त मान में अशुद्धि हो जाती है ।

इस विषय पर एक और उदाहरण दिखाते हैं ।

चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{ताय}{\sqrt{अ^2-य^2}} = ज्या^{-१} \frac{य}{अ}$, इस लिये

$$\int_{-अ}^{अ} \frac{ताय^{-१}}{\sqrt{अ^2-य^2}} = ज्या^{-१}(+१) - ज्या^{-१}(-१) यह संशयारमक हुआ -$$

क्योंकि त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि

ज्या $\left\{ \left(\frac{\pi}{२} + १ \right) \right\} = +१$ और ज्या $\left\{ \left(\frac{\pi}{२} - १ \right) \right\} = -१$ जहाँ म और न कोई अभिन्न संख्या हैं । इस लिये म और न का भिन्न-भिन्न मान मानने से अनेक मान आ सकते हैं ।

इस संशय को दूर करने के लिये विचारो कि—अ से बढ़ते बढ़ते जब य, +अ के तुल्य होगा तो निश्चय है कि एक वार शून्य के तुल्य होगा इस लिये ज्या^{-१}(-१) यह बढ़ते बढ़ते जब ज्या^{-१}(+१) इस के तुल्य होगा तो अवश्य इस का एक ही मान ज्या^{-१}(०) यह होगा इस लिये यदि ज्या^{-१}(-१) का मान $\left(\frac{\pi}{२} - १ \right) \frac{\pi}{२}$ यह मानो तो अवश्य ज्या^{-१}(०) का मान $\left(\frac{\pi}{२} - १ \right) \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{२}$ यह और ज्या^{-१}(+१) का मान

$$\left(\frac{\pi}{२} - १ \right) \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{२} = \left(\frac{\pi}{२} - १ \right) \frac{\pi}{२} + \pi$$
 यह होगा । इस लिये

ज्या^{-१}(+१) - ज्या^{-१}(-१) = $\left(\frac{\pi}{२} - १ \right) \frac{\pi}{२} + \pi - \left(\frac{\pi}{२} - १ \right) \frac{\pi}{२} = \pi$ यह निश्चय मान हुआ । अथवा पहले ज्या^{-१} $\frac{य}{अ}$ इस का मान चलनकलन के (२०) वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से श्रेढी के रूप में

$$ज्या^{-१} \frac{य}{अ} = \frac{य}{अ} + \frac{१}{१.२} \cdot \frac{य^३}{३अ^३} + \frac{१.३}{२.४} \frac{य^५}{५अ^५} + \frac{१.३.५}{२.४.६} \frac{य^७}{७अ^७} + \dots$$
 यह ले आओ

इस में य = अ, और य = -अ, यह मान कर

$$ज्या^{-१}(+१) = १ + \frac{१}{१.२} \cdot \frac{१}{३} + \frac{१.३}{२.४} \cdot \frac{१}{५} + \dots$$

$$ज्या^{-१}(-१) = -१ - \frac{१}{१.२} \cdot \frac{१}{३} - \frac{१.३}{२.४} \cdot \frac{१}{५} - \dots = -ज्या^{-१}(+१)$$
 इस लिये

ज्या^{-१}(+१) - ज्या^{-१}(-१) = २ज्या^{-१}(+१) = $२ \frac{\pi}{२} = \pi$ यह सिद्ध हुआ । परन्तु इस बात का यहाँ अवश्य ध्यान रखना चाहिये कि ज्या पर से इस श्रेढी द्वारा जो व्याप का मान आता है वह सर्वदा $\frac{\pi}{२}$ इस से अल्प इस लिये यहाँ भी पहले के ऐसा इस एक मान को लेकर विचार करना चाहिये ।

४६। जब ४० वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$\int_a^k f(y) \text{ ताय} = \text{च}_1 f(a) + \text{च}_2 f(y_1) + \dots + \text{च}_n f(y_{n-1}) \dots (१)$$

$$\int_a^k f_a(y) \text{ ताय} = \text{च}_1 f_a(a) + \text{च}_2 f_a(y_1) + \dots + \text{च}_n f_a(y_{n-1}) \dots (२)$$

$$\text{और } \int_a^k f_i(y) \text{ ताय} = \text{च}_1 f_i(a) + \text{च}_2 f_i(y_1) + \dots + \text{च}_n f_i(y_{n-1}) \dots (३)$$

होंगे इस लिये $f(a), f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_{n-1})$ प्रत्येक क्रम से यदि $f_a(a), f_a(y_1), f_a(y_2), \dots, f_a(y_{n-1})$

और $f_i(a), f_i(y_1), f_i(y_2), \dots, f_i(y_{n-1})$ इन के प्रत्येक पद के भीतर हों अर्थात् $f_a(a)$ और $f_i(a)$ के बीच में $f(a), f_a(y_1)$ और $f_i(y_1)$ के बीच में $f(y_1)$ इत्यादि हों तो स्पष्ट है कि दूसरे और तीसरे के प्रत्येक पदों के योग अर्थात् $\int_a^k f_a(y) \text{ ताय}$ और $\int_a^k f_i(y) \text{ ताय}$ के बीच में $\int_a^k f(y) \text{ ताय}$

यह होगा ।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि $f(y)$ यह $f_a(y)$ और $f_i(y)$ के बीच में हो य के अ और क के बीच किसी मान में तो

$$\int_a^k f(y) \text{ ताय यह भी } \int_a^k f_a(y) \text{ ताय और } \int_a^k f_i(y) \text{ ताय के बीच में होगा ।}$$

जैसे त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि $\text{ज्या}^{2n+1} y$ यह सर्वदा $\text{ज्या}^{2n} y$ और $\text{ज्या}^{2n+2} y$ के बीच में रहता है अर्थात् $\text{ज्या}^{2n} y > \text{ज्या}^{2n+1} y > \text{ज्या}^{2n+2} y$ तो

$$\text{ऊपर के सिद्धान्त से } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n} y \text{ ताय} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n+1} y \text{ ताय}$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n+2} y \text{ ताय यह होगा ।}$$

४७। यदि $f(y)$, y के स्थान में a और a से बड़ी संख्या का उत्पादन देने से उत्तरोत्तर न्यून होता जाय तो

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots \text{अनन्त} \dots \text{यह श्रेणी और } \int_a^{\infty} f(y) \text{ ताय}$$

यह दोनों सान्त अथवा दोनों अनन्त होंगे ।

क्योंकि (४०) वें प्रक्रम में $k = a + 1$ ऐसा मानो तो सिद्ध होगा कि

$$(k-a)f(a) = f(a) \int_a^{a+1} f(y) \text{ ताय} \int (k-a)f(a+1) = f(a+1) \\ f(a+2)$$

इसी तरह $f(a+1) \int_a^{a+2} f(y) \text{ ताय} \int$
 \vdots

$$f \{ a + (n-1) \} \int_{a+(n-1)}^{a+n} f(y) \text{ ताय} \int f(a+n)$$

तीनों का योग कर न को अनन्त मानने से (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots \int_a^\infty f(y) \text{ ताय} \int f(a+1)$$

+ $f(a+2) + f(a+3) + \dots$ यह सिद्ध हुआ ।

इसलिये यदि श्रेणी सान्त होगी तो $\int_0^\infty f(y) \text{ ताय} \int$ यह सान्त और श्रेणी

के अनन्त में अनन्त होगा ।

४८ । यदि $\text{लाय} = \text{ला}$, $\text{ला} \{ \text{ला}(y) \} = \text{ला}^t(y)$, $\text{ला}[\text{ला} \{ \text{ला}(y) \}] = \text{ला}^t(y)$ इत्यादि कल्पना करो तो चलनकलन से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\{ \text{ला}^{d+1}(y) \}^{1-t}}{1-t} \right] = \frac{1}{\text{यला}(y) \text{ला}^t(y) \dots \text{ला}^d(y) \{ \text{ला}^{d+1}(y) \}^t \text{ताय}}$$

इस लिये यदि $f(y) \text{ ताय} = \frac{1}{\text{यला}(y) \text{ला}^t(y) \text{ला}^2(y) \dots \text{ला}^d(y) \{ \text{ला}^{d+1}(y) \}^t}$

तो $\int f(y) \text{ ताय} = \frac{\{ \text{ला}^{d+1}(y) \}^{1-t}}{1-t}$ यदि t रूप के तुल्य न हो और यदि t

रूप के तुल्य हो तो $\int f(y) \text{ ताय} = \text{ला}^{d+1}(y)$ होगा ।

और $\int_a^\infty f(y) \text{ ताय} = - \frac{\{ \text{ला}^{d+1}(a) \}^{1-t}}{1-t}$ यदि $t > 1$ और यदि $t = 1$ वा

$t < 1$ तो $\int_a^\infty f(y) \text{ ताय} = \infty$ इस लिये (४७) वें प्रक्रम से

$$f(y) = \frac{1}{\text{यला}(y) \text{ला}^t(y) \dots \text{ला}^d(y) \{ \text{ला}^{d+1}(y) \}^t}$$
 इस में y के स्थान

में $a, a+1, a+2, \dots$ इत्यादि का उत्थापन देने से जो श्रेणी होगी वह सान्त

होगी अर्थात् उसके उत्तरोत्तर पास के दो पदों का सम्बन्ध एक से अल्प होता जायगा । चाहे पद की संख्या कितनी ही हो ।

४९ । कल्पना करो कि जिस में अनन्त पद हैं वैसी एक

$$\frac{१}{फा(न)} + \frac{१}{फा(न+१)} + \frac{१}{फा(न+२)} + \frac{१}{फा(न+३)} + \dots \dots \dots$$
 यह श्रेणी है जिसके

किसी एक पद का मान $\frac{१}{फा(य)}$ ऐसा समझो । अब यहाँ इस बात का पता लगाना है कि इस श्रेणी का मान सान्त होगा वा अनन्त । यदि श्रेणी का मान अनन्त होगा तब तो स्पष्ट ही है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों $\frac{१}{फा(य)}$ भी बढ़ता जायगा । इस लिये यदि श्रेणी का मान सान्त होगा तो निश्चय है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों फा(य) भी बढ़ता जायगा ।

कल्पना करा कि न से आगे अनन्त तक चाहे जितना य बढ़ता जाय परन्तु $\frac{१}{फा(य)}$ इस का मान सर्वदा $\frac{ग}{य^त}$ इस से छोटा है जहां ग और त कोई स्थिर संख्या और $त > १$ है । ऐसी स्थिति में ४७ वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि उद्दिष्ट श्रेणी का मान $\frac{ग}{न^त} + \frac{ग}{(न+१)^त} + \frac{ग}{(न+२)^त} + \dots$ इस श्रेणी से अल्प होगा इस लिये स्वयं भी सान्त होगा ।

$$\text{यदि } \frac{१}{फा(य)} < \frac{ग}{य^त} \therefore य^त < ग फा(य)$$

और त ला (य) < ला { गफा(य) } लघुरिक्थ लेने से

इस लिये त < $\frac{\text{ला} \{ गफा(य) \}}{\text{लाय}}$ इस में यदि $य = \infty$ तो हर और अंश

दोनों अनन्त होते हैं इस लिये चलनकलन के ५वें अध्याय से

$\frac{\text{ला} \{ गफा(य) \}}{\text{लाय}}$ इस का मान $\frac{यफा(य)}{फा(य)}$ यह होगा । इस लिये इस में

य के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक से अधिक हो तो त का ऐसा मान मान सकते हैं जो कि एक से अधिक अर्थात् सर्वदा $य^त < ग फा(य)$ हो । और इसी तरह यदि लुप्तभिन्न का मान एक से न्यून हो तो त का मान ऐसा छोटा मान सकते हैं जिस में सर्वदा $य^त > ग फा(य)$ हो ऐसी स्थिति में श्रेणी का मान अनन्त होगा ।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि किसी श्रेणी में यदि y के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से $\frac{y\text{फा}(y)}{\text{फा}(y)}$ इस का मान एक से अधिक हो तो श्रेणी का मान सान्त और अल्प हो तो श्रेणी का मान अनन्त होगा ।

परन्तु यदि $\frac{y\text{फा}(y)}{\text{फा}(y)}$ इस का मान एक के बराबर हो तो (४८)वें प्रक्रम से

$$\int \text{फ}(y) \text{ ताय} = \frac{g y^{1-t}}{1-t} \text{ इस लिये } \int_n^\infty \text{फ}(y) \text{ ताय} = \infty \text{ ऐसी स्थिति}$$

में अब यह नहीं कह सकते कि उद्दिष्ट श्रेणी का मान सान्त होगा वा अनन्त ।

अब मानो कि n से लेकर अनन्त तक y के मान में $\frac{1}{\text{फा}(y)}$ यह

$\frac{g}{y \{ \text{ला}(y) \}^t}$ इससे छोटा रहता है जहां g और t स्थिराङ्क और $t > 1$ तो ४८वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि श्रेणी का मान सान्त होगा । परन्तु

$$\frac{1}{\text{फा}(y)} < \frac{g}{y \{ \text{ला}(y) \}^t} \therefore \{ \text{ला}(y) \}^t < \frac{g \text{फा}(y)}{y} \text{ लघुरिक्थ लेने से}$$

$$t \text{ ला}^t(y) < \text{ला} \frac{g \text{फा}(y)}{y} \therefore t < \frac{\text{ला} \frac{g \text{फा}(y)}{y}}{\text{ला}^t(y)} = \frac{\text{ला} g \text{फा}(y) - \text{ला}(y)}{\text{ला}^t(y)}$$

यहां भी y के अनन्त मान में यह लुप्तभिन्न हुआ जिस का मान चलनकलन के

३६वें प्रक्रम से $\text{ला}(y) \left\{ \frac{y \text{फा}(y)}{\text{फा}(y)} - 1 \right\}$ यह होगा

इस लिये इस का मान यदि एक से अधिक हो तो श्रेणी का मान सान्त और एक से न्यून में अनन्त होगा ।

इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक के बराबर हो तो फिर पहले के ऐसा

अनिश्चय होगा । तब $\frac{1}{\text{फा}(y)}$ इस का मान $\frac{g}{y \text{ला}(y) \{ \text{ला}^t(y) \}^t}$ इस से

छोटा कल्पना कर पहले ऐसी क्रिया करो तो लुप्तभिन्न का मान

$$\text{ला}^t(y) \left[\text{ला}(y) \left\{ \frac{y \text{फा}(y)}{\text{फा}(y)} - 1 \right\} \right] \text{ ऐसा होगा}$$

इस में यदि $\frac{y \text{फा}(y)}{\text{फा}(y)}$ ता, $\text{ला}(y) \left\{ \frac{y \text{फा}(y)}{\text{फा}(y)} - 1 \right\} = \text{ता}$,

$\text{ला}^3(\text{य}) [\text{ला}(\text{य}) \left\{ \frac{\text{यफा}^1(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} - 1 \right\}] = \text{ता}_2$ इत्यादि मानो तो

साधारण यह क्रिया उत्पन्न होती है

$$\text{ता}_1 = \text{ला}(\text{य})(\text{ता}_0 - 1), \text{ता}_2 = \text{ला}^2(\text{य})(\text{ता}_1 - 1), \text{ता}_3 = \text{ला}^3(\text{य})(\text{ता}_2 - 1) \dots\dots\dots$$

$\text{ता}_m = \text{ला}^m(\text{य}) \{ \text{ता}_{m-1} - 1 \}$ । इस लिये इस सिद्धान्त पर से $\text{ता}_0, \text{ता}_1, \text{ता}_2,$ इत्यादि के मान बनाते चले जावो जिस का मान एक से भिन्न हो उस पर से उद्दिष्ट श्रेणी का मान सान्त वा अनन्त है इस का विचार कर सकने हों ।

यदि $\frac{1}{\text{फा}(\text{य})} = \text{फि}(\text{य})$ तो $\text{फा}(\text{य}) = \frac{1}{\text{फि}(\text{य})}$ इस का उत्थापन ता_0 में देने से

$\text{ता}_0 = \frac{\text{यफा}^1(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} = - \frac{\text{यफि}^1(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$ ऐसा होगा फिर आगे $\text{ता}_1, \text{ता}_2$ इत्यादि का मान पूर्ववत् जान सकते हो ।

चलनकलन से $-\frac{\text{यफि}^1(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} = \text{य} \left\{ \frac{\text{फि}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य} + 1)} - 1 \right\}$ यह भी सिद्ध कर सकते

हो जब $\text{य} = \infty$ क्योंकि ऐसी दशा में $\frac{\text{फि}^1(\text{य} + \text{प})}{\text{फि}(\text{य} + 1)} = \frac{\text{फि}^1(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$ जहां $\text{प} < 1$ ।

इस प्रकार से श्रेणी का मान सान्त वा अनन्त होगा यह सब डिमार्गन (Demorgan) साहब ने अपने चलनकलन और चलराशिकलन (Differential and Integral Calculus) के २०८—२१० प्र० में लिखा है । इस में यह कुछ नियम नहीं कि लुप्तभिन्न ही के प्रकार से मान ले आवो चाहिये कि जिस प्रकार से लाघव हो वह क्रिया करो ।

जैसे जिस श्रेणी का न संख्यक पद $\left(\frac{1}{\text{य}}\right)^{\text{अ} + \frac{\text{क}}{\text{य}}}$ यह है उस का मान कैसा होगा यह जानना है यहां

$$\left(\frac{1}{\text{य}}\right)^{\text{अ} + \frac{\text{क}}{\text{य}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{य}}} = \frac{1}{\text{फा}(\text{य})}, \text{ यदि फि}(\text{य}) = \left(\frac{1}{\text{य}}\right)^{\text{अ} + \frac{\text{क}}{\text{य}}}$$

इस लिये लघुस्विकथ लेने से

$$\text{ला} \left\{ \text{फि}(\text{य}) \right\} = \left(\text{अ} + \frac{\text{क}}{\text{य}} \right) \text{ला} \left(\frac{1}{\text{य}} \right) = - \left(\text{अ} + \frac{\text{क}}{\text{य}} \right) \text{ला}(\text{य})$$

तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = - \left[\frac{a}{y} + \frac{k}{y^2} \right] + \frac{कलाय}{y^2}$$

इस लिये

$$ता_0 = - \frac{y f'(y)}{f(y)} = \left(a + \frac{k}{y} \right) - \frac{कलाय}{y} \text{ इस में यदि } y = \infty \text{ तो}$$

$$\frac{k}{y} = 0, \text{ और } \frac{कलाय}{y} = k \frac{1}{y} = 0 \text{ लुप्तभिन्न के आनयन से ।}$$

इस लिये $ता_0 = a$ । इस लिये यदि $a > 1$ तो श्रेढी का मान

सान्त और यदि $a < 1$ तो श्रेढी का मान अनन्त होगा ।

५० । कल्पना करो कि

$$फा(l) = फ(y-l) + लफ'(y-l) + \frac{ल^2}{2} फ''(y-l) + \dots + \frac{ल^n}{n} फ^{(n)}(y-l), \dots (१)$$

ल के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$फा'(l) = फ'(y-l) + फ'(y-l) - लफ''(y-l) + लफ''(y-l) - \frac{ल^2}{2} फ'''(y-l)$$

$$\dots + \frac{ल^{n-1}}{n-1} फ^{(n)}(y-l) - \frac{ल^n}{n} फ^{(n+1)}(y-l) \\ = - \frac{ल^n}{n} फ^{(n+1)}(y-l)$$

ल के ० और च के बीच मान में दोनों के सान्त चल मान

$$फा(च) - फा(०) = - \frac{1}{n} \int_0^{\text{च}} ल^n फ^{(n+1)}(y-l) ताल$$

परन्तु (१) में ल के स्थान में ० और च का उत्थापन देने से

$$फा(च) - फा(०) = फ(y-च) + चफ'(y-च) + \frac{च^2}{2} फ''(y-च) + \dots \\ + \frac{च^n}{n} फ^{(n)}(y-च) - फ(y) \\ = - \frac{1}{n} \int_0^{\text{च}} ल^n फ^{(n+1)}(y-l) ताल$$

य के स्थान में $a + च$ का उत्थापन देकर पक्षान्तरानयन से

$$फ(a + च) = फ(a) + चफ'(a) + \frac{च^2}{2} फ''(a) + \dots + \frac{च^n}{n} फ^{(n)}(a)$$

$$+ \left[\frac{१}{n} \int_0^c l^n f^{n+१}(y-l) \text{ताल} \right]$$

इस लिये $f(a+c)$ इस का चलनकलन में टेलर के सिद्धान्त से जो श्रेणी में मान आवेगा उस में n पद के अनन्तर $n+१, n+२, \dots$ इत्यादि जो पद होंगे

उनका योग $\left[\frac{१}{n} \int_0^c l^n f^{n+१}(y-l) \text{ताल} \right]$ इस सान्तचल के तुल्य होगा

जिस का मान (४०) वें प्रक्रम से $\left[\frac{१}{n} p^n c^{n+१} f^{n+१}(a+c-pc) \right]$ ऐसा वा,

$$\left[\frac{१}{n} f^{n+१}(a+c-pc) \int_0^c l^n \text{ताल} \right] = \left[\frac{१}{n} f^{n+१} (a+c(१-p)) \int_0^c l^n \text{ताल} \right]$$

$= \left[\frac{१}{n} f^{n+१}(a+cp) \int_0^c l^n \text{ताल} \right]$ ऐसा होगा [जहां $p_१ = १ - p =$ कोई एक

से न्यून संख्या है] $= \left[\frac{c^{n+१}}{n+१} f^{n+१}(a+cp) \right]$ ऐसा होगा

५१। जब चलनकलन से सिद्ध है कि फल का वा फल में स्थिराङ्क युत वा रहित का तात्कालिक सम्बन्ध एक ही होता है इस लिये एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का यदि कई एक प्रकार से चलानयन करो तो स्पष्ट है कि वे सब तुल्य होंगे वा उनका अन्तर कोई स्थिराङ्क के तुल्य होगा ।

$$\text{जैसे } \int \frac{\text{ताय}}{(१-y)^२} = \int \text{ताय} (१-y)^{-२} = - \int - \text{ताय} (१-y)^{-२} = \frac{१}{१-y}$$

यह प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से सिद्ध हुआ । और इसी में यदि

$y = \frac{१}{२}$ ऐसा मानो तो ताय $= - \frac{\text{तार}}{२}$ और $(१-y)^२ = \left(\frac{१}{२}\right)^२$ इस लिये

$$\int \frac{\text{ताय}}{(१-y)^२} = - \int \frac{\text{तार}}{(२-१)^२} = \frac{१}{२-१} = \frac{१}{१-y}$$

प्रथमाध्याय के तीसरे सूत्र से । इस लिये दोनों का अन्तर $= \frac{१}{१-y} \circ \frac{१}{१-y} = १ =$ स्थिराङ्क के हुआ ।

ऐसे ही सब जगह जानना चाहिये ।

इसी जगह यदि $\int_0^२ \frac{\text{ताय}}{(१-y)^२}$ इस का मान जानना हो तो स्पष्ट है कि दोनों

पर से एक ही आवेगा क्योंकि $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(y)$ वा, $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(y) +$ स्थि ऐसा मानो तो पहले से $\int_a^b f(y) \text{ताय} = \text{फा}(b) - \text{फा}(a)$

और दूसरे मान से भी फा(क) + स्थि — { फा(अ) + स्थि } = फा(क) — फा(अ) वही हुआ ।

एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का भिन्न भिन्न रूप में चलानयन कर और उन पर से दो सीमाओं के भीतर दो सान्त चलानयन कर अनेक चमत्कृत समता उत्पन्न कर सकते हो । जैसे खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int y^m(1-y)^n \text{ताय} = \frac{y^{m+1}(1-y)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1} \int y^{m+1}(1-y)^{n-1} \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^1 y^m(1-y)^n \text{ताय} = \frac{n}{m+1} \int_0^1 y^{m+1}(1-y)^{n-1} \text{ताय}$$

वार वार यही क्रिया करने से

$$\int_0^1 y^m(1-y)^n \text{ताय} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots \dots 1}{(m+1)(m+2) \dots (m+n+1)} \dots (१)$$

और द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$y^m(1-y)^n = y^m \left\{ 1 - ny + \frac{n(n-1)}{2} y^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} y^3 + \dots \right\}$$

$$= y^m - ny^{m+1} + \frac{n(n-1)}{2} y^{m+2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} y^{m+3} + \dots$$

इस लिये प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से

$$\int y^m(1-y)^n \text{ताय} = \frac{y^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+2} y^{m+2} + \frac{n(n-1)}{2(m+3)} y^{m+3}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3(m+4)} y^{m+4} + \dots$$

$$\text{और } \int_0^1 y^m(1-y)^n \text{ताय} = \frac{1}{m+1} - \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{m+2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{m+3}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot \frac{1}{m+4} + \dots + (-1)^r \frac{n^r}{m+n+1} \dots (२)$$

इस लिये यहाँ ऊपर की युक्ति से निश्चय है कि (१) और (२) का दहिना पक्ष परस्पर तुल्य हैं ।

५२ । खण्ड चलानयन से सिद्ध है कि

$$\int f(y) \text{ताय} = yf(y) - \int yf'(y) \text{ताय}$$

$$\int yf'(y) \text{ताय} = \frac{y^2}{2} f'(y) - \frac{1}{2} \int y^2 f''(y) \text{ताय}$$

$$\int y^2 f''(y) \text{ ताय} = \frac{y^3}{3} f''(y) - \frac{1}{3} \int y^3 f'''(y) \text{ ताय}$$

.....

इन सब का एक एक में उत्थापन देने से

$$\int f(y) \text{ ताय} = y f(y) - \frac{y^2}{2} f'(y) + \frac{y^3}{3} f''(y) - \frac{y^4}{4} f'''(y) + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n f^{(n-1)}(y) + \frac{(-1)^n}{n} \int y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$$

इस लिये

$$\int_0^a f(y) \text{ ताय} = a f(a) - \frac{a^2}{2} f'(a) + \frac{a^3}{3} f''(a) - \frac{a^4}{4} f'''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} a^n}{n} f^{(n-1)}(a) + \frac{(-1)^n}{n} \int_0^a y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$$

इस प्रकार से सान्तचल ज्ञान के लिये यह जो श्रेणी उत्पन्न हुई है उसे बर्नली (Bernoulli) साहब ने निकाला है इस लिये उन के आदरार्थ इस को बर्नली की श्रेणी (Bernoulli's Series) कहते हैं।

यह जहाँ $f(y)$ का रूप y^{n-1} इस तरह का हो वहाँ पर बड़े काम की है क्योंकि ऐसी जगह पर

$f^{(n)}(y) = \frac{d^n (y^{n-1})}{d^n y^n}$ यह शून्य के तुल्य होगा। अथवा जहाँ पर $f'(y)$ ताय इसकी अपेक्षा $\int y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$ इस का मान सहज में निकलता हो वहाँ पर भी यह बड़े काम की है।

जहाँपर $\int_0^a y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$ इसका मान बहुत थोड़ा हो वहाँ पर भी स्वल्पान्तर से $\int_0^a f(y) \text{ ताय}$ इसके आसन्न मान का ज्ञान इस से सहज में हो सकता है।

५३। जब कि सिद्ध है कि $\int f(y) \text{ ताय}$ यह y के उस फल को बताता है जिसका तात्कालिक सम्बन्ध $f(y)$ है तब स्पष्ट है कि एक फल ऐसा भी होगा जिसका तात्कालिक सम्बन्ध $f'(y)$ ताय यह हो अर्थात् यदि $\int f(y) \text{ ताय} = f_a(y)$ मानो तो $\int f_a(y) \text{ ताय}$ यह भी एक मान जान सकते हो जिसका तात्कालिक सम्बन्ध $f_a(y)$ के समान होगा। ऐसे ही वार वार चलज्ञान कर सकते हो।

इसको $\int' फ(य)ताय = फा(य)। \int' फा(य)ताय = \int \int' फ(य)ताय ताय = फ(य)।$
 $\int' फि(य)ताय = \int' \int' फा(य)ताय ताय = \int' \int' \int' फ(य) ताय ताय ताय$
 इस तरह से लिखते हैं । $\int' \int' \int' फ(य)ताय ताय ताय$ यह प्रकाश करता है कि $\int' फ(य)ताय$ इसके मान को ताय से गुणने से जो हो उसके चल मान को फिर ताय से गुणकर गुणित फल का चल है ।

जैसे $\int' ताय = य + ग,$

$$\int (य + ग_1)ताय = \int \int ताय ताय = \frac{य^2}{2} + ग_1य + ग_2$$

$$\int \left(\frac{य^2}{2} + ग_1य + ग_2 \right) = \int \int (य + ग_1)ताय ताय = \int \int \int ताय ताय ताय$$

$$= \frac{य^3}{6} + \frac{ग_1य^2}{2} + ग_2य + ग_3 \text{ जहां } ग_1, ग_2 \text{ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।}$$

इसी तरह यहां न बार चलज्ञान करें तो स्पष्ट है कि उस का मान $आ_0य^n + आ_1य^{n-1} + आ_2य^{n-2} + \dots + आ_n$ ऐसा होगा जहां $आ_0, आ_n,$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

५४ । यदि $\int' च ताय = च_1, \int' च_1ताय = च_2, \int' च_2ताय = च_3$ इत्यादि मानो जहां $च, च_1,$ इत्यादि $य$ के फल हैं और $\frac{ताज}{ताय} = ज_1, \frac{ता_1ज}{ताय} = ज_2,$ इत्यादि जहां

$ज$ $य$ का कोई फल है तो खण्डचलानयन से

$$\int' चज ताय = च_1ज - \int' च_1ज_1 ताय = च_1ज_1 - च_2ज_1 + \int' च_2ज_2 ताय$$

$$= च_1ज - च_2ज_1 + च_3ज_2 - च_4ज_3 + \dots + (-1)^{n-1} च_n ज_{n-1}$$

$+ (-1)^n \int' च_n ज_n ताय$ इसी श्रेणी में यदि $च = 1$ और $ज = फ(य)$ मानो तो बर्नली की श्रेणी उत्पन्न हो जायगी इस लिये इस श्रेणी को बर्नली के श्रेणी का मूल कह सकते हैं । यह श्रेणी भी बहुत स्थानों में बड़े काम की है ।

जैसे इस श्रेणी में यदि $च = इ^य$ मानो तो स्पष्ट है कि $च_1, च_2$ इत्यादि सब परस्पर तुल्य होंगे इस लिये

$$\int' इ^य ज ताय = इ^य \{ ज - ज_1 + ज_2 - ज_3 + \dots + (-1)^{n-1} ज_{n-1} \}$$

$$+ (-1)^n \int' इ^य ज_n ताय$$

इस में $ज$ के स्थान में भिन्न भिन्न फल का उत्थापन देने से हजारों उदाहरण बना सकते हो ।

५१। यदि $च_1 = \int च ताय$, $च_2 = \int च_1 ताय$, $च_3 = \int च_2 ताय$ इत्यादि मानो तो खण्डचलानयन से

$$च_3 = \int च_2 ताय = यच_2 - \int य \frac{ताच_2}{ताय} ताय = य \int च ताय - \int य च ताय$$

$$च_3 = \int च_2 ताय = \int \{ य \int च ताय - \int य च ताय \} ताय$$

यहां भी खण्डचलानयन से

$$\begin{aligned} च_3 &= \frac{य^2}{2} \int च ताय - \int \frac{य^2}{2} च ताय - य \int य च ताय + \int य^2 च ताय \\ &= \frac{य^2}{2} \int च ताय - य \int य च ताय + \frac{1}{2} \int य^2 च ताय \end{aligned}$$

इसी प्रकार से बार बार करते जाओ तो अन्त में

$$\begin{aligned} \underline{च}_{n+1} | \underline{n} &= य^n \int च ताय - नय^{n-1} \int य च ताय + \int \frac{n(n-1)}{2} य^{n-2} \int य^2 च ताय \dots \\ &\dots + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-3+1)}{2} य^{n-3} \int य^3 च ताय \\ &\quad + (-1)^n \int य^n च ताय \end{aligned}$$

यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा ।

इस की सत्यता के लिये मानो कि किसी n के मान में यह सिद्धान्त सत्य है तो $\underline{च}_{n+2} = \int \underline{च}_{n+1} ताय$ और $| \underline{n} \underline{च}_{n+2} = \int | \underline{n} \underline{च}_{n+1} ताय$

$$\begin{aligned} &= \int \{ य^{n+1} ताय \int च ताय \} - \int \{ नय^{n-1} ताय \int य च ताय \} \\ &+ \int \left\{ \frac{n(n-1)}{2} य^{n-2} ताय \int य^2 च ताय \right\} \dots \text{प्रत्येक} \left\{ \right\} \text{ अन्तर्गत का} \end{aligned}$$

खण्डचलानयन से मान ले आने से

$$\begin{aligned} | \underline{n} \underline{च}_{n+2} &= \frac{य^{n+1}}{n+1} \int च ताय - \frac{1}{n+1} \int य^{n+1} च ताय - य^n \int य च ताय + \int य^{n+1} च ताय \\ &+ \frac{n}{2} य^{n-1} \int य^2 च ताय - \frac{n}{2} \int य^{n+1} च ताय + \dots \end{aligned}$$

$n+1$ से दोनों पक्षों को गुणकर दहिने पक्ष को यथा क्रम लिखने से

$$\begin{aligned} \underline{च}_{n+2} | \underline{n+1} &= य^{n+1} \int च ताय - (n+1) य^n \int य च ताय \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{2} य^{n-1} \int य^2 च ताय - \dots \end{aligned}$$

$$\text{वा, } \underline{च}_{n+1} | \underline{n} = य^n \int च ताय - नय^{n-1} \int य च ताय$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \int y^c \text{चताय} \dots$$

इस लिये यदि यह सिद्धान्त किसी न मान में सत्य हो तो $n+1$ में भी सत्य होगा परन्तु यदि $n=2$ तो च३ के मान से स्पष्ट है कि यह सिद्धान्त सत्य है इसलिये n के सब मान में यह सिद्धान्त सत्य ठहरा ।

५६। \int ज्याⁿयताय वा \int कोज्याⁿयताय के मान के लिये यदि चलन-कलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से ज्याⁿय वा कोज्याⁿय का रूप ज्या और कोटिज्या की श्रेणी में ले आवो तो बहुत ही सुगमता चलानयन में होगी । जैसे चलनकलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध है कि

$$\angle \text{ज्या}^n \text{य} = \text{कोज्या}^n \text{य} - 2 \text{कोज्या}^{n-2} \text{य} + 2$$

इस लिये

$$\begin{aligned} \angle \int \text{ज्या}^n \text{यताय} &= \int \text{कोज्या}^n \text{यताय} - 2 \int \text{कोज्या}^{n-2} \text{यताय} + \int 2 \text{यताय} \\ &= \frac{\text{ज्या}^n \text{य}}{n} - 2 \text{ज्या}^{n-2} \text{य} + 2 \text{य} \end{aligned}$$

$$\therefore \int \text{ज्या}^n \text{यताय} = \frac{\text{ज्या}^n \text{य}}{n} - \frac{\text{ज्या}^{n-2} \text{य}}{n-2} + \frac{2 \text{य}}{n-2}$$
 यह पहले लघूकरणसिद्धान्त

की अपेक्षा बड़े लाघव से सिद्ध हुआ ।

इस प्रकार और भी बहुत उपाय से जिस में सुगमता हो वैसी क्रिया करनी चाहिये ।

५७। इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को जिस में बोध हो इस लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखाते हैं ।

$$(१) \left(\frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{२}{२n}\right)^n + \left(\frac{३}{२n}\right)^n + \dots २n \text{ पद तक जो यह श्रेणी है}$$

इस में $\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२n}\right)^n + \dots n \text{ पद तक जो यह श्रेणी है इसका भाग देने से क्या लब्धि होगी यदि } n = \infty$ ।

यहां प्रश्नानुसार n के अनन्त मान में

$$\frac{\left(\frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{२}{२n}\right)^n + \left(\frac{३}{२n}\right)^n + \dots २n \text{ पद तक}}{\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२n}\right)^n + \left(\frac{१}{२} + \frac{३}{२n}\right)^n + \dots n \text{ पद तक}}$$
 इसका मान जानना है

अंश और हर को $\frac{१}{२n}$ से गुण देने से

$$\text{अंश} = \frac{1}{2^n} \left\{ \left(\frac{1}{2^n}\right)^n + \left(\frac{2}{2^n}\right)^n + \left(\frac{3}{2^n}\right)^n + \dots + 2 \text{ न पद तक} \right\}$$

$$\text{हर} = \frac{1}{2^n} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)^n + \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2^n}\right)^n + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2^n}\right)^n + \dots + n \text{ पद तक} \right\}$$

४०वें प्रक्रम के समीकरण के साथ अंश और हर दोनों की तुलना करो तो अंश में $\frac{1}{2^n} = \text{च}$, $\text{अ} = 0$, $\text{क} = 0 + 2\text{नच} = 1$ और $\text{फ(य)} = (\text{य})^n$

$$\text{इस लिये अंश का मान} = \int_0^1 \text{फ(य)ताय} = \int_0^1 \text{य}^n \text{ताय} = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{और हर में पहला पद फ(अ)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)^n \therefore \text{अ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{और } \frac{1}{2^n} = \text{च} \therefore \text{क-अ} = \text{चन} = \frac{1}{2} \text{ और } \text{क} = \frac{1}{2} + \text{अ} = 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{और फ(य)} = (\text{य})^n \text{ इस लिये } \int \text{फ(य)ताय} = \int (\text{य})^n \text{ताय} = \frac{(\text{य})^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये हर} &= \int \frac{1 + \frac{1}{2^n} \text{फ(य)ताय}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}} = \frac{(1 + \frac{1}{2^n})^{n+1}}{n+1} - \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n})^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1} \quad \text{यदि } n = \infty \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये ऊपर के भिन्न का मान} = \frac{\text{अं}}{\text{ह}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}$$

यही उत्तर हुआ ।

(२) सिद्ध करो कि यदि $\text{फ(य)} = \text{फ(अ + य)}$ तो

$$\int_0^{m\text{अ}} \text{फ(य)ताय} = m \int_0^{\text{अ}} \text{फ(य)ताय}$$

यहाँ $\int_0^{m\text{अ}} \text{फ(य)ताय}$ इसका मान यदि २ प्रक्रम से श्रेणी में लावो तो

$$\frac{m\text{अ}}{n} \left\{ \text{फ}(0) + \text{फ}\left(\frac{m\text{अ}}{n}\right) + \text{फ}\left(\frac{2m\text{अ}}{n}\right) + \dots + \text{फ}\left[\frac{m\text{अ}(n-1)}{n}\right] \right\} \text{ ऐसा होगा } \dots \dots (१)$$

परन्तु प्रश्न से $\text{फ(य)} = \text{फ(अ + य)}$, $\text{फ}(0) = \text{फ(अ)}$, $\text{फ}\left(\frac{m\text{अ}}{n}\right) = \text{फ}\left(\text{अ} + \frac{m\text{अ}}{n}\right)$, इत्यादि । इनका उत्थापन देने से (१) का मान

$$\frac{m\text{अ}}{n} \left\{ (\text{अ}) + \text{फ}\left(\text{अ} + \frac{m\text{अ}}{n}\right) + \text{फ}\left(\text{अ} + \frac{2m\text{अ}}{n}\right) + \dots + \text{फ}\left[\text{अ} + \frac{m\text{अ}(n-1)}{n}\right] \right\}$$

$$= \int_{\text{अ}}^{m\text{अ}+\text{अ}} \text{फ(य)ताय} \text{ यह हुआ ।}$$

इसी रीति से फ(य) पर से

$$\int_a^{m\Delta + \Delta} f(y) \text{ ताय} = \frac{m\Delta}{n} \left\{ f(a) + f\left(a + \frac{m\Delta}{n}\right) + f\left(a + \frac{2m\Delta}{n}\right) + \dots \right. \\ \left. + f\left[a + \frac{m\Delta(n-1)}{n}\right] \right\} \dots (2)$$

यहाँ भी जब $f(y) = f(y + \Delta)$, $f(a) = f(2\Delta)$,

$f\left(a + \frac{m\Delta}{n}\right) = f\left(2\Delta + \frac{m\Delta}{n}\right)$, इ० इन का उत्थापन (२) में देने से (२) का मान

$$\frac{m\Delta}{n} \left\{ f(2\Delta) + f\left(2\Delta + \frac{m\Delta}{n}\right) + \dots + f\left[2\Delta + \frac{m\Delta(n-1)}{n}\right] \right\} \\ = \int_{2\Delta}^{m\Delta + 2\Delta} f(y) \text{ ताय यह हुआ}$$

इस पर से सिद्ध हुआ कि

$$\int_0^{m\Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_a^{m\Delta + \Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_{2\Delta}^{m\Delta + 2\Delta} f(y) \text{ ताय इत्यादि ।}$$

म के एक स्थान में १, का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_a^{2\Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_{2\Delta}^{3\Delta} f(y) \text{ ताय} = \dots = \int_0^{m\Delta} \frac{m\Delta}{m-1} f(y) \text{ ताय} (3)$$

अब ४१ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_0^{m\Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_0^{\Delta} f(y) \text{ ताय} + \int_{\Delta}^{2\Delta} f(y) \text{ ताय} \\ + \int_{2\Delta}^{3\Delta} f(y) \text{ ताय} + \dots + \int_{(m-1)\Delta}^{m\Delta} f(y) \text{ ताय} = m \int_0^{\Delta} f(y) \text{ ताय}$$

(३) से सिद्ध हुआ ।

अथवा जब $f(y) = f(a + y)$ इस लिये $f(0) = f(a)$ और $f(a) = f(2\Delta)$

इस लिये य के ० और अ के बीच मानों में जो $\int_0^{\Delta} f(y) \text{ ताय}$ इस का मान होगा वही य के औ २ अर अ के बीच मानों में भी

$\int_a^{2\Delta} f(y) \text{ ताय}$ इस का मान होगा यों आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि

$$\int_a^{2\Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_{2\Delta}^{3\Delta} f(y) \text{ ताय}, \text{ इत्यादि । इस पर से ४१वें प्रक्रम के}$$

(२) समीकरण से पहले के ऐसा उत्तर निकाल सकते हैं ।

$$(३) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला ज्याय ताय इस का मान क्या होगा ?}$$

यहाँ ४१ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्यायताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \text{ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला कोज्याय ताय}$$

$$\therefore 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्यायताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{लाज्याय} + \text{लाकोज्याय}) \text{ताय} = 2r$$

$$\text{यदि } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला ज्याय ताय} = r,$$

$$\text{वा } 2r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला (ज्यायकोज्याय)ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \text{लाज्याय} - \text{ला}^2 \} \text{ताय}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला ज्यायताय} - \frac{1}{2} \pi \text{ला}^2$$

२य के स्थान में y का उत्थापन देने से सिद्ध कर सकते हैं

$$\text{कि } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्यायताय} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \text{ला ज्यायताय} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला ज्याय ताय}$$

४१वें प्रक्रम के (६) समीकरण से

$$\text{इस लिये } 2r = r - \frac{1}{2} \pi \text{ला}^2 \therefore r = -\frac{1}{2} \pi \text{ला}^2 = \frac{1}{2} \pi \text{ला}^2$$

$$(४) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{यज्यायताय}}{१ + \text{कोज्याय}} \text{ इस का क्या मान होगा ।}$$

इस का मान r_1 मान कर ४१वें प्रक्रम के (५)वें समीकरण से

$$r_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{यज्याय ताय}}{१ + \text{कोज्याय}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\text{यज्यायताय}}{१ + \text{कोज्याय}} + \frac{(\frac{\pi}{2} - y) \text{ज्यायताय}}{१ + \text{कोज्याय}} \right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\text{यज्यायताय}}{१ + \text{कोज्याय}} - \frac{\text{यज्यायताय}}{१ + \text{कोज्याय}} + \frac{\frac{\pi}{2} \text{तायज्याय}}{१ + \text{कोज्याय}} \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} \text{ज्याय ताय}}{१ + \text{कोज्याय}} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ज्याय ताय}}{१ + \text{कोज्याय}}$$

$$= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{तार}}{१ + r^2} \text{ (यदि } r = \text{कोज्याय)}$$

परन्तु $\int \frac{\text{तार}}{१+y^२} = \text{स्प}^{-२} = \text{स्प}^{-१}$ (कोज्याय)

इस लिये जब $y=०$ तो कोज्याय = १ और $\text{स्प}^{-१}$ (कोज्याय) = $\frac{\pi}{४}$

और जब $y = \frac{\pi}{४}$ तो कोज्याय = ० और $\text{स्प}^{-१}$ (कोज्याय) = ०

इस लिये $-\pi \int_0^{\frac{\pi}{४}} \frac{\text{तार}}{१+y^२} = -\pi(० - \frac{\pi}{४}) = \frac{\pi^२}{४}$ यह उत्तर हुआ।

(५) $\int_0^१ \frac{\text{ला}(१+y)}{१+y^२}$ ताय इस का क्या मान होगा।

यहां यदि $\text{स्प} = y$ तो ताय = छे^२ तार = $(१ + \text{स्प}^२)$ तार

इस लिये $\frac{\text{ला}(१+y)}{१+y^२}$ ताय = $\frac{\text{ला}(१+\text{स्प})}{१+\text{स्प}^२} (१+\text{स्प}^२)$ तार = ला $(१+\text{स्प})$ तार

$\therefore \int_0^१ \frac{\text{ला}(१+y)}{१+y^२}$ ताय = $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्प})$ तार = $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \text{ला} \left\{ १ + \text{स्प}(\frac{\pi}{४}-r) \right\}$ तार

४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से। परन्तु $\text{स्प}(\frac{\pi}{४}-r) = \frac{१-\text{स्प}}{१+\text{स्प}}$

इस लिये $१ + \text{स्प}(\frac{\pi}{४}-r) = \frac{२}{१+\text{स्प}}$ और ला $\left\{ १ + \text{स्प}(\frac{\pi}{४}-r) \right\} = \text{ला}२ - \text{ला}(१+\text{स्प})$

इसका उत्थापन देने से

$\int_0^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्प})$ तार = $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \left\{ \text{ला}२ - \text{ला}(१+\text{स्प}) \right\}$ तार

पक्षान्तरानयन से

$२ \int_0^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्प})$ तार = $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \text{तार ला}२ = \frac{\pi}{४} \text{ला}२$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्प})$ तार = $\frac{\pi}{८} \text{ला}२$ ।

यहां देखो इस प्रकार से कैसे लाघव से उत्तर निकला है।

यहां यदि ला $(१+y)$ का रूप $y - \frac{y^२}{२} + \frac{y^३}{३} - \frac{y^४}{४} + \dots$ ऐसा बना कर

इस में साधारण बीजगणित की रीति से $१+y^२$ का भाग दो तो

$$\frac{\log(1+y)}{1+y^2} = y - \frac{y^3}{2} - \frac{2}{3} y^5 + \frac{y^7}{4} + \frac{13}{15} y^9 \dots \text{ऐसा होगा}$$

इसमें y के गुणक १ को g_1 , और y^2 के गुणक $-\frac{1}{2}$ को

$g_2 \dots y^{n-2}$ के गुणक को g_{n-2} मानो तो y^n का गुणक

$-(\frac{1}{n} + g_{n-2})$ यह होगा यदि न सम हो । और विषम हो तो

$(\frac{1}{n} - g_{n-2})$ यह गुणक होगा ।

यदि $\frac{\log(1+y)}{1+y^2}$ इसमें ऊपर के श्रेणी का उत्थापन देकर चलमान निकालो तो

$$\int \frac{\log(1+y) \text{ ताय}}{1+y^2} = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{y^4}{2} - \frac{2}{3} \frac{y^6}{2} + \frac{1}{4} \frac{y^8}{2} + \frac{13}{15} \frac{y^{10}}{2} \dots \text{ऐसा होगा}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^1 \frac{\log(1+y) \text{ ताय}}{1+y^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{13}{15} \cdot \frac{1}{2} \dots$$

$$\text{इस लिये } \frac{\pi}{2} \log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{13}{15} \cdot \frac{1}{2} \dots$$

ऐसा यह अत्यन्त चमत्कार सिद्ध होता है ।

$$(६) \int_0^{\pi} \cos^n \text{ लाज्याष ताष इसका मान } \int_0^{\pi} \sin^n \text{ लाज्याष ताष इस का}$$

फल होगा यह सिद्ध करो । यदि $n > 2$ ।

यहां ४१ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^{\pi} \cos^n \text{ लाज्याष ताष} = \int_0^{\pi} (\pi - \varphi)^n \text{ लाज्याष ताष} = \int_0^{\pi} \pi^n (1 - \frac{\varphi}{\pi})^n \text{ लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^n \int_0^{\pi} \left\{ 1 - n \frac{\varphi}{\pi} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\varphi^2}{\pi^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \frac{\varphi^3}{\pi^3} + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{\varphi^n}{\pi^n} \right\} \text{ लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^n \int_0^{\pi} \left\{ 1 - n \frac{\varphi}{\pi} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\varphi^2}{\pi^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \frac{\varphi^3}{\pi^3} + \dots \right\} \text{ लाज्याष ताष}$$

$$+ \int_0^{\pi} (-1)^n \varphi^n \text{ लाज्याष ताष}$$

समशोधन से

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx - \int_0^{\pi} (-1)^n \sin^n x \, dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx - n \pi^{n-1} \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \, dx \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{2} \pi^{n-2} \int_0^{\pi} \sin^{n-2} x \, dx \dots \\ & \quad + (-1)^{n-1} \pi \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \, dx \dots \quad (1) \end{aligned}$$

(१) इस में n के स्थान में 2 का उत्थापन देने से

$$0 = \pi^2 \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \, dx \text{ ऐसा होगा}$$

इस लिये

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

परन्तु ४१वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से और इस प्रक्रम के (३)

$$\text{उदाहरण से } \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2}$$

इस लिये $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$ ला $\frac{1}{2}$ यह सिद्ध हुआ ।

$$\text{यदि } \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \text{ ला } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ तो}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \text{ ला } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ च,}$$

इन का उत्थापन (१) में देने से और n के स्थान में 3 मानने से

$$2 \int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx = \pi^2 \text{ च} - \frac{2}{2} \pi^2 \text{ च} + 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

इस प्रकार से वार वार उत्थापन देने से

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \, dx = f(\text{च}_2) \text{ ऐसा हो जायगा जहाँ}$$

$$\text{च}_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \text{ ।}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१ । सिद्ध करो कि यदि $f(y) = f(-y)$ तो

$$\int_{-a}^a f(y) \text{ ताय} = 2 \int_0^a f(y) \text{ ताय} । \int_{-a}^0 f(y) \text{ ताय} = \int_0^+ a f(y) \text{ ताय} ।$$

$$\text{और } \int_0^{-a} f(y) = - \int_0^+ a f(y) \text{ ताय}$$

२ । यदि $f(y) = -f(-y)$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_{-a}^+ a f(y) \text{ ताय} = 0 । \int_{-a}^0 f(y) \text{ ताय} = - \int_0^+ a f(y) \text{ ताय} ।$$

$$\text{और } \int_0^{-a} f(y) \text{ ताय} = \int_0^+ a f(y) ।$$

३ । यदि $f(y) = f(-y)$ और $f(a) = -f(-a)$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_{-a}^+ a \{ f(y) + f(a) \} \text{ ताय} = \int_{-a}^+ a f(y) \text{ ताय} = \int_{-a}^+ a \{ f(y) - f(a) \} \text{ ताय} ।$$

४ । सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \text{ ताय} = \sqrt{\pi} \text{ और } \int_{-a}^+ a \text{ ज्याय}^2 = 0$$

५ । सिद्ध करो कि

$$\int_{-a}^+ a \frac{\text{कोज्याय ताय}}{1+y^2} = \int_{-a}^+ a \frac{\text{कोज्याय ताय}}{(1+y^2)(\text{कोज्याय}-\text{ज्याय})}$$

६ । सिद्ध करो कि

$$\int_a^k f(y) \text{ ताय} = \frac{k-a}{2g} \int_{-g}^+ g f\left(\frac{k+a}{2} + \frac{k-a}{2g} y\right) \text{ ताय}$$

७ । सिद्ध करो कि

$$\int_a^k f(y) \text{ ताय} = \frac{k-a}{g-b} \int_b^g f\left(\frac{a+g-b}{g-b} + \frac{k-a}{g-b} y\right) \text{ ताय}$$

८ । सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(1+n\text{कोज्याय}) \text{ ताय} = y \text{ला} \frac{n}{2na} + 2n\text{ज्याय} - \frac{2}{2.2} n^2 \text{ज्याय}^2 \\ + \frac{2}{3.3} n^3 \text{ज्याय}^3 - \frac{2}{4.4} n^4 \text{ज्याय}^4 + \dots$$

$$\text{जहां } na = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$$

९ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} \text{ला}(1+n\text{कोज्याय}) \text{ ताय} = \pi \text{ला} \frac{n^2}{2(1-\sqrt{1-n^2})}$$

१० । सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(1 + 2\text{मकोज्याय} + \text{म}^2)\text{ताय} \\ = 2(\text{मज्याय} - \frac{\text{म}^2}{2} \text{ज्या२य} + \frac{\text{म}^3}{2} \text{ज्या३य} - \frac{\text{म}^4}{2} \text{ज्या४य} + \dots)$$

$$\text{वा, } \int \text{ला}(1 + 2\text{मकोज्याय} + \text{म}^2)\text{ताय} \\ = 2\text{यलाम} + 2 \left\{ \frac{\text{ज्याय}}{\text{म}} - \frac{\text{ज्या२य}}{2\text{म}^2} + \frac{\text{ज्या३य}}{3\text{म}^3} - \frac{\text{ज्या४य}}{4\text{म}^4} + \dots \right\}$$

११ । सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(1 + \text{नकोज्याय})\text{ताय} = 2\text{य लाकोज्या} \frac{\pi}{2} \\ + 2(\text{स्प} \frac{\pi}{2} \text{ज्याय} - \frac{1}{2} \text{स्प}^2 \frac{\pi}{2} \text{ज्या२य} + \dots)$$

यदि $n = \text{ज्याष}$

१२ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} \text{ला}(1 + \text{न}_0 \text{ज्या}^2 \text{य})\text{ताय} = \frac{\pi}{2} \text{ला} \left\{ (1 + \text{न}_0)(1 + \text{न}_1)^{\frac{1}{2}}(1 + \text{न}_2)^{\frac{1}{4}}(1 + \text{न}_3)^{\frac{1}{8}} \dots \right\}$$

$$\text{जहां } \text{न}_{d+1} = \frac{\text{न}_d^2}{2(\text{न}_d + 1)}$$

यहां ४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से $\int_0^{\pi} \text{ला}(1 + \text{न}_0 \text{ज्या}^2 \text{य})\text{ताय}$

$= \int_0^{\pi} \text{ला}(1 + \text{नकोज्या}^2 \text{य})\text{ताय}$ फिर इन दोनों को जोड़ कर एक नियम

परम्परा बनावो ।

१३ । १२वें और ९वें प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\left\{ \frac{1 + (1 + \text{न}_0)}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} = (1 + \text{न}_0)(1 + \text{न}_1)^{\frac{1}{2}}(1 + \text{न}_2)^{\frac{1}{4}}(1 + \text{न}_3)^{\frac{1}{8}} \dots$$

१४ । सिद्ध करो कि

$$\left\{ \text{फ}(a)\text{फ}\left(a + \frac{\pi}{n}\right)\text{फ}\left(a + \frac{2\pi}{n}\right) \dots \text{फ}\left(a + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n} \int_a^{a+\pi} \text{फ}(y)\text{ताय}$$

यदि n का मान अनन्त हो तो ।

१५ । प्रथमाध्याय के ३३वें प्रश्न से पहले यह सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{कयकोज्याअयताय}} = \frac{\text{इ}^{\text{कयकोज्याअयताय}}}{(\text{अ}^2 + \text{क}^2)^{\frac{1}{2}}} + \text{स्थि}, \text{ जहां स्पष} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

फिर इस पर से यह सिद्ध करो कि $\int \text{इ}^{\text{कयकोज्याअयताय}}$ इस के चल का चल फिर उस के चल का चल यों n बार तक जो चल होगा उस का प्रमाण

$$\frac{इकयकोज्या(अय-नय)}{(अ^२ + क^२)^{\frac{n}{२}}} + गा + गा_२य + गा_२य^२ + गा_३य^३ + \dots + गा_{n-१}य^{n-१} यह होगा ।$$

जहाँ गा, गा_२, गा_३ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

१६। टवें से सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} लाज्याय &= ला^{\frac{१}{३}}कोज्या२य - \frac{१}{३}कोज्या४य - \frac{१}{३}कोज्या६य - \frac{१}{३}कोज्या८य \dots, \text{ और} \\ लाकोज्याय &= ला^{\frac{१}{३}} + कोज्या२य - \frac{१}{३}कोज्या४य + \frac{१}{३}कोज्या६य - \frac{१}{३}कोज्या८य + \dots \end{aligned}$$

१७। सिद्ध करो कि यदि किसी श्रेणी का न संख्यक पद

$$\frac{त(त+अ)(त+२अ) \dots (त+nअ)}{द(द+अ)(द+२अ) \dots (द+nअ)} \text{ यह हो तो यह श्रेणी सान्त होगी}$$

यदि $द > त + अ$ और यदि $द < त + अ$ तो श्रेणी का मान अनन्त होगा ।

१८। सिद्ध करो कि किसी श्रेणी के $n+१$ संख्यक पद में न संख्यक पद

का भाग देने से यदि लब्धि

$$\frac{य^न + आय^{न-१} + काय^{न-२} + \dots}{य^न + अय^{न-१} + कय^{न-२} + \dots} \text{ यह हो तो यदि } अ > का + १ \text{ तो श्रेणी का}$$

मान सान्त और यदि $अ < का + १$ तो अनन्त होगा ।

$$१९। \text{ यदि } आ = \int_{अ}^{क} च^रताय, का = \int_{अ}^{क} चजताय \text{ और } गा = \int_{अ}^{क} ज^रताय$$

तो सिद्ध करो कि $आ \times गा > का^२$ ।

बीजगणित का $(अ_१^२ + अ_२^२ + \dots + अ_n^२) (क_१^२ + क_२^२ + \dots + क_n^२)$

$> (अ_१क_१ + अ_२क_२ + \dots + अ_nक_n)^२$ यह सिद्धान्त देखो ।

२०। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} ला कोस्पय ताय = ०$$

$$२१। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\infty} \frac{२ अकताय}{य^४ + य^२(अ^२ + क^२) + अ^२क^२} = \frac{\pi}{अ+क}$$

$$२२। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^अ \frac{(१-क^रय^र) ताय}{\sqrt{(अ^२-य^२)}} = \frac{\pi}{२} \left[१ - \frac{अ^२क^र}{२} \right]$$

२३ । सिद्ध करो कि यदि n का मान अनन्त हो तो

$$\frac{1}{n^2} \left\{ 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 \right\} = \frac{1}{5}$$

२४ । सिद्ध करो कि यदि n का मान अनन्त हो तो

$$\frac{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{24}{85}$$

२५ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{8}$ —१

२६ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{6} \cos 6x + \dots \right)$$

२७ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 8x - \frac{1}{16} \cos 12x + \dots$$

२८ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi} \cos^6 x \, dx = \frac{5\pi}{32} - \frac{15}{64} \cos 4x + \frac{3}{64} \cos 8x - \dots$

२९ । सिद्ध करो कि $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots + \text{अनन्त}$

इस श्रेणी का मान सान्त होगा यदि $a > 1$ और k का मान चाहे जो हो ।

३० । $(a-1) + (a^2-1) + (a^3-1) + (a^4-1) + \dots + (a^n-1)$

यह सान्त होगा यदि $n = \infty$ उ० नहीं ।

३१ । सिद्ध करो कि

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \dots \text{ यह सर्वदा सान्त होगा ।}$$

३२ । सिद्ध करो कि $\int e^{-y} \{ f(y) + f'(y) \} dy = e^{-y} f(y)$

३३ । सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{(1+y)^2} = \frac{1}{2}$

३४ । सिद्ध करो कि यदि

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + \text{अनन्त}$ यह सान्त हो तो $\int f(x) dx$ इस का मान भी यदि श्रेणी में ले आवें तो उस श्रेणी का मान भी सान्त होगा ।

३५ । यदि e^{kx} का n वार चल निकालें तो सिद्ध करो कि उसका

$$\text{मान} = \frac{e^{kx}}{kn} + \frac{a_1 e^{kx}}{k(n-1)} + \frac{a_2 e^{kx}}{k(n-2)} + \dots + \frac{a_{n-1} e^{kx}}{k} + \frac{a_n}{k}$$

जहाँ आ_१, आ_२, इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

३६। एक आदमी अपने (अ) स्थान से पूर्व को चला । दूसरा जिस का (क) स्थान अ से ठीक उत्तर की ओर एक मील पर था वहाँ से उसके मिलने के लिये चला । पहले की प्रतिक्षण की गति को उस के और अ स्थान के सैक अन्तर के लघुरिक्त्य से गुण देने और उस के और क स्थान के अन्तरवर्ग का भाग देने से जो लब्ध हो उतना प्रतिक्षण में दूसरा चलता था तो बताओ कि जब पहला अपने स्थान से एक मील गया उस समय दूसरा अपने स्थान से कितना गया होगा ।

$$उ० \frac{\pi}{2} ला (२) = \frac{१००}{१००} मील$$

३७। अ स्थान से साथ ही घोड़े दौड़ में क, ख, और ग घोड़े दौड़े । किसी क्षण में अ स्थान से जितनी मील दूरी पर क होता था उस से और उस के वर्ग से उस के उस क्षण की गति को गुण दो तो वह क्रम से ख और ग की उस क्षण की गति होती है तो बताओ कि क और ख, फिर अ स्थान से क और ख, क और ग, और ख और ग कितनी कितनी दूरी पर मिलेंगे ।

$$उ० \quad ख, ग \frac{३}{४} । क, ग, \sqrt{३} = १\frac{३}{४} और क, ख,$$

२ मील दूरी पर मिलेंगे ।

इति चतुर्थाध्याय ।

